# ESERCIZI GEOM. "DRITTA"

Titolo nota 16/05/2018

**4.6** $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$

posizione relativa

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

metodo "automatico"

$$r: \begin{cases} x = -\frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} \\ y = 1/3\,\lambda + 1/3 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -\lambda \\ 2x + y = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{1-2\lambda}{3}$$

$$y = x + \lambda = \frac{1+\lambda}{3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s: \begin{cases} x = -\mu + 1 \\ y = \mu - 2 \\ z = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - \mu \leftarrow z \\ y = -2 + \mu \leftarrow z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

direz. di r è $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ direz. di s è $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nexists\, k \neq 0$ tale che $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

r, s non sono né parallele né coincidenti

$$\begin{cases} -2\lambda + 1/3 = -\mu + 1 \\ \lambda + 1/3 = \mu - 2 \\ 3\lambda = \mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2\lambda + 1/3 = -3\lambda + 1 \\ \lambda + 1/3 = 3\lambda - 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

IMPOSSIBILE $\longrightarrow$ $\begin{cases} \lambda = 2/3 \\ +2\lambda = 7/3 \end{cases}$ contraddizione!

r ed s non hanno quindi punti in comune

$\Rightarrow$ r e s sono sghembe

Come faccio a trovare una retta $\perp$ sia a r che ad s?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-3 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come si fa senza $\wedge$ ?

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2l + m + 3n = 0 \\ -l + m + n = 0 \end{cases}$$

$-l + 2n = 0$ $\quad l = 2n$

$\begin{pmatrix} 2n \\ n \\ n \end{pmatrix}$ $\quad m = l - n$ $= n$

$n = 1$ fornisce la soluz. giusta

$$\begin{cases} x = 2v + x_0 \\ y = v + y_0 \leftarrow \\ z = v + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{2v_1 + x_0} = -2\lambda + \frac{1}{3} \\ \boxed{v_1 + y_0} = \lambda + 1/3 \\ \boxed{v_1 + z_0} = 3\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{2v_2 + x_0} = -\mu + 1 \\ \boxed{v_2 + y_0} = \mu - 2 \\ \boxed{v_2 + z_0} = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v_1 + x_0 = -2v_1 - 2y_0 + 2/3 \\ v_1 + z_0 = 3v_1 + 3y_0 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v_2 + x_0 = -v_2 - z_0 + 1 \\ \cancel{v_2} + y_0 = \cancel{v_2} + z_0 - 2 \end{cases}$$

$$2v_1 = z_0 - 3y_0 + 1$$

$$\begin{cases} z_0 - 3y_0 + 1 + x_0 = -z_0 + 3y_0 - 1 - 2y_0 + 2/3 \\ y_0 = z_0 - 2 \end{cases}$$

$z_0 = 0$

$y_0 = -2$

$x_0 = -28/3$

$6 + 1 + x_0 = -6 - 1 + 9 + 2/3$

la retta $\perp$ ad r ed s passa, ad esempio, per $\left(-\frac{28}{3}, -2, 0\right)$

$$\begin{cases} x = 2v - \frac{28}{3} \\ y = v - 2 \\ z = v \end{cases} \qquad v_1 = \frac{z_0 - 3y_0 + 1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$P \in r \quad \left(-\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \qquad \frac{62}{9} = \frac{\overset{84}{\cancel{28}}}{\cancel{3}9}$$

$$v_2 = \frac{-x_0 - z_0 + 1}{3} = \frac{28/3 + 1}{3} = \frac{31}{9}$$

$$Q \in s \quad \left(-\frac{22}{9}, \frac{13}{9}, \frac{31}{9}\right)$$

Altro modo

$$\left(-2\lambda + \frac{1}{3} + \mu - 1\right)^2 + \left(\lambda + \frac{1}{3} - \mu + 2\right)^2 + (3\lambda - \mu)^2 = \text{minimo}$$

$$\left(+2\lambda - \mu + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\lambda - \mu + \frac{7}{3}\right)^2 + (3\lambda - \mu)^2 = \text{minimo}$$

$$15\lambda^2 + 3\mu^2 - 12\lambda\mu + \frac{22}{3}\lambda - \frac{\cancel{18}}{\cancel{3}}\overset{6}{\mu} + \frac{53}{9} = \text{minimo}$$

$$\begin{cases} 30\lambda - 12\mu + 22/3 = 0 \\ 6\mu - 12\lambda - 18/3 = 0 \end{cases}$$

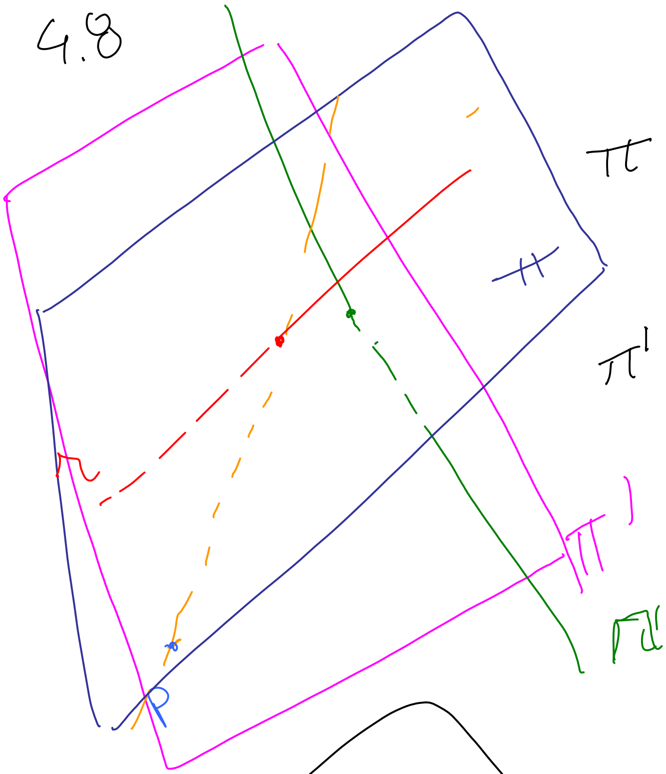
$$\begin{cases} 15\lambda - 6\mu = -11/3 \\ -2\lambda + \mu = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15\lambda - 6 - 12\lambda = -\frac{11}{3} \\ \mu = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$3\lambda = 7/3 \qquad \lambda = 7/9 \qquad \mu = 23/9$$

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot 7/9 + 1/3 \\ 1 \cdot 7/9 + 1/3 \\ 3 \cdot 7/9 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/9 \\ 10/9 \\ 7/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -23/9 + 1 \\ 23/9 - 2 \\ 23/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ 5/9 \\ 23/9 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma)^2 + (\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma')^2 + \delta$$

4.8




- Tutti i piani contenenti r

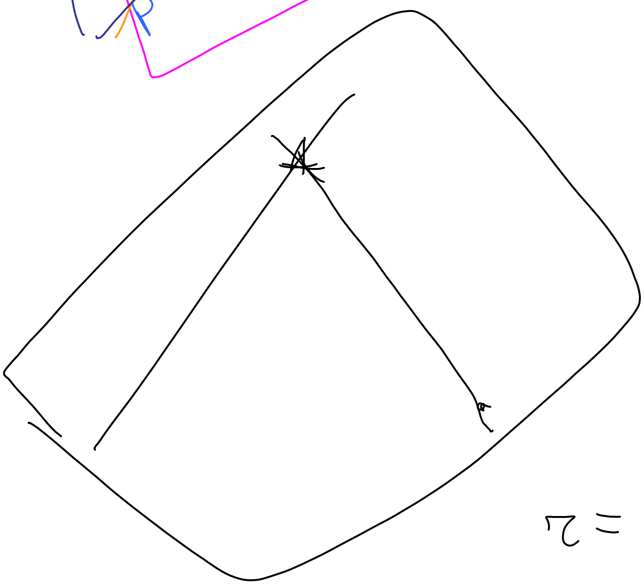
π · Scelgo quello che passa per P

- Tutti i piani contenenti r'

π' · Scelgo quello passa per P

retta r generata intersecando π e π' sta su un piano che contiene r e sta anche su un piano che contiene r'

tale retta interseca sia r che r'.



4.9 $P \equiv (2,1,0)$

$$r = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$r' = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5\lambda + 0\mu = 0$$

$$\lambda(x_1 + 2x_2 + 1) + \mu(x_2 - 2x_3 - 1) = 0$$

$$\lambda x_1 + (2\lambda + \mu)x_2 - 2\mu x_3 + \lambda - \mu = 0$$ scelgo quello che passa per P

$$\lambda \cdot 2 + (2\lambda + \mu)\cdot 1 - 2\mu \cdot 0 + \lambda - \mu = 0$$

$$2\lambda + 2\lambda + \mu + \lambda - \mu = 0 \qquad 5\lambda = 0$$

$\lambda = 0$ $\mu =$ qualsiasi

$$\pi = \{x_2 - 2x_3 - 1 = 0\}$$

$$\lambda'(2x_1 - x_2 - 1) + \mu'(3x_1 + 3x_2 - x_3) = 0$$

$$\lambda'(2\cdot 2 - 1 - 1) + \mu'(3\cdot 2 + 3\cdot 1 - 0) = 0$$

$2\lambda' + 9\mu' = 0 \qquad \lambda' = 9 \quad \mu' = -2$

$9(2x_1 - x_2 - 1) + (-2)(3x_1 + 3x_2 - x_3) = 0$

$18x_1 - 9x_2 - 9 - 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$

$12x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 9 = 0 \qquad \pi'$

$$s: \begin{cases} x_2 - 2x_3 - 1 = 0 & \pi \\ 12x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 9 = 0 \end{cases} \qquad P \in s$$

$s = \pi \cap \pi' \qquad \begin{matrix} P \in \pi \\ P \in \pi' \end{matrix} \Rightarrow P \in (\pi \cap \pi') \Rightarrow P \in s$

$s \cap r \neq \emptyset$ se $r$ sono complanari, entrambe $\in \pi$ non sono né parallele né coincidenti

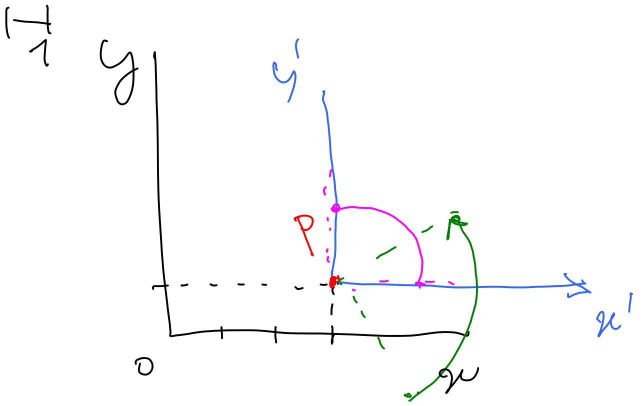
quindi $s \cap r = P_1$

$s \cap r' \neq \emptyset$ se $r'$ sono complanari, né parallele né coincidenti

$s \cap r' = P_2$

## 4.11

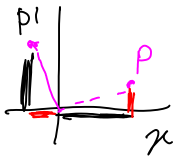
$f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^2$ rotazione di $\pi/2$ intorno a $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$




$R_{\frac{\pi}{2}}$ rotazione intorno all' "origine"

$x_p \xrightarrow{\text{diventa}} y_p$

$y_p \to -x_p$




$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p - 3 \\ y_p - 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p+1 \\ x_p-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p+1+3 \\ x_p-3+1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_p+4 \\ x_p-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 4 \\ +1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{pmatrix}$$ "coordinate affini"

---

4.12 $f(x) = A \cdot x + b$ di $\mathbb{R}^3$ rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ intorno $r: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

rot. di $\frac{2\pi}{3}$ intorno alla retta di dir. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passante per $O$ è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ già vista

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p-1 \\ y_p-0 \\ z_p-1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_p-1 \\ x_p-1 \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_p \\ x_p-1 \\ y_p+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi assegno 2 esercizi

$u, v, x$ vettori di $\mathbb{R}^3$

$$u \wedge x = u \wedge v$$

$x = v$ certamente, verifica l'= . È l'unico?

- $u \wedge x = 0$ facile
- $u \wedge x = v$ che soluzioni hanno?

$v \perp u$ se voglio soluzioni

$x \perp v$ se $x$ è soluzione!

Provateci!