ROTAZIONI

Titolo nota 09/05/2018

3,34 e 3,35 , 36 , 38

3.34 ISOMETRIE di $\mathbb{R}^3$, trovare angoli e asse

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A = matrice ortogonale con det = +1
rotazione "vera"

$$tr(A) = 0 = 1 + 2\cos\Phi \longrightarrow \cos\Phi = -\frac{1}{2}$$

$$\Phi = \pm\frac{2\pi}{3}$$

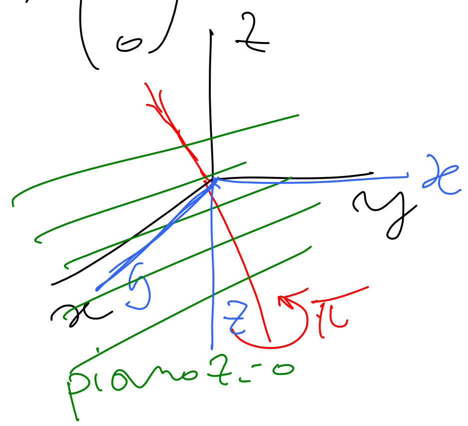
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y = x \\ -z = y \\ -x = z \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ +1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$ va bene ugualmente!

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Tr(B) = -1 = 1 + 2\cos\Phi$$

$$\longrightarrow \cos\Phi = -1 \qquad \Phi = \pm\pi$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \\ -z = z \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$tr(C) = -1 \rightsquigarrow \cos\Phi\ -1$$

$$\Phi = \pm\pi$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{cases} -x + 2y + 2z = 3x \\ 2x - y + 2z = 3y \\ 2x + 2y - z = 3z \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ intorno a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — r

"si vede a occhio"!

3.35 Scrivere $A \in M(3)$ tale che rappresenti una

Soluzione che

A^3 ruota di $3\cdot\frac{2\pi}{3} = 2\pi \doteq 0$ intorno a r

$A^3 = I$ $\qquad e_1 \xrightarrow{A} e_2 \xrightarrow{A} e_3 \xrightarrow{A} e_1$

$e_2 \to e_3 \to e_1 \to e_2$

$e_3 \underbrace{\boxed{\to e_1 \to e_2 \to}}_{A^3} e_3$

$e_1 \xrightarrow{A^3} e_1$

$e_2 \xrightarrow{A^3} e_2$

$e_3 \xrightarrow{A^3} e_3$

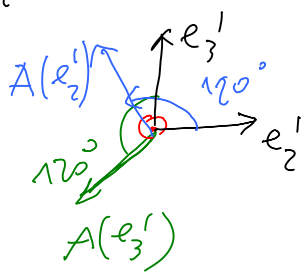
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$tr(A) = 0$
$= 1 + 2\cos\Phi$
$\Rightarrow \cos\Phi = -\frac{1}{2}$
$\Phi = \pm\frac{2\pi}{3}$

$A^3 = I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1'$



e_2' e e_3' $\perp$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$$

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \mathcal{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

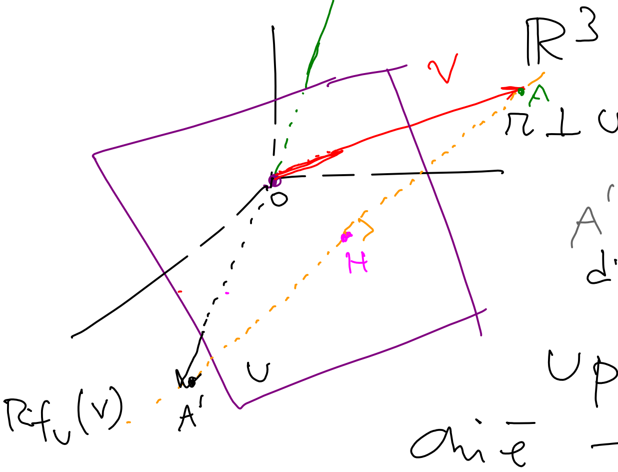
matrice ortogonale con determinante +1

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$A = M^{-1}A'M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

provare per credere!

3.36 $\quad Rif_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ riflessione rispetto a un piano $U \subset \mathbb{R}^3$



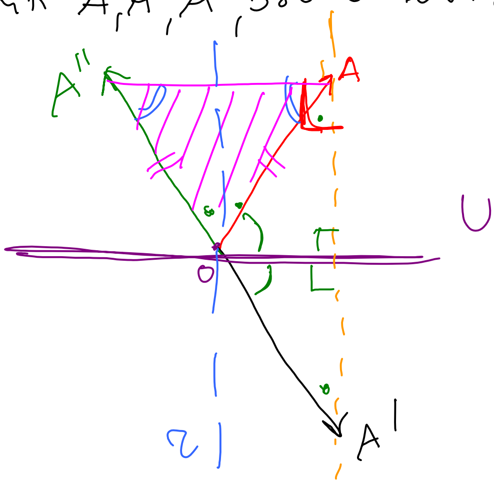
$r \perp U$ passante per la "punta" di v (A)

$A' \in r$ tale che H è punto medio di $A'A$

U passante per O

Chi è $-Rif_U(v)$?

I punti A, A', A'' sono evidentemente complanari

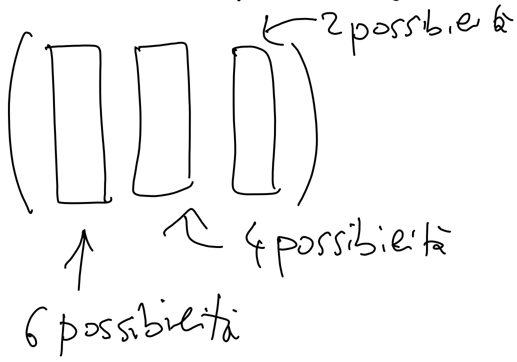


A'' è il simmetrico di A rispetto alla retta r passante per O e $\perp U$

3.37 48 matrici ortogonali con elementi tutti interi

interi possibili sono $-1, 0, 1$

per ogni colonna posso mettere solo una volta ± 1 e gli altri 2 devono essere che zeri



$6 \times 4 \times 2 = 48$

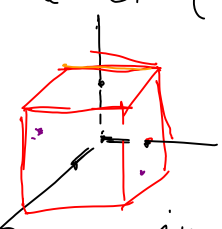
24 hanno $\det = +1$

24 hanno $\det = -1$

Se ne moltiplico fra di loro due qualunque d'esse, il risultato è una delle 48 matrici (CHIUSURA)

$\rightarrow$ GRUPPO

SIMMETRIE DEL CUBO

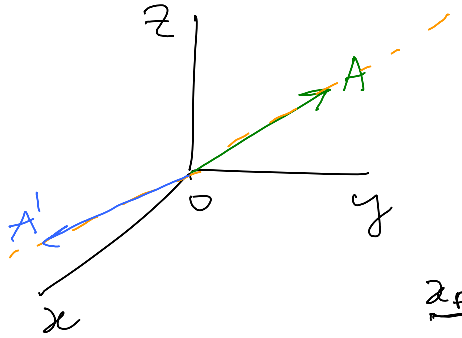


$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che lasciano il cubo in sé

→ Solo gli operatori lineari associati a queste 48 matrici

3.38

(3) Riflessione rispetto all'origine



$A=\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{pmatrix}$

O deve essere il punto medio del segmento AA'

$\frac{x_A+x_{A'}}{2}=0$ $\frac{y_A+y_{A'}}{2}=0$ $\frac{z_A+z_{A'}}{2}=0$

$x_{A'}=-x_A$
$y_{A'}=-y_A$
$z_{A'}=-z_A$

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

$R_{\{0\}}=-I$

$U\ \{x-y+3z=0\}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ $r=\begin{cases} x=\lambda+x_v \\ y=-\lambda+y_v \\ z=3\lambda+z_v \end{cases}$

$r\cap U$

$\lambda+x_v+\lambda-y_v+9\lambda+3z_v=0$

$11\bar{\lambda}+(x_v-y_v+3z_v)=0$

$x_H=-\frac{x_v-y_v+3z_v}{11}+x_v=\frac{10x_v+y_v-3z_v}{11}$

$y_H=+\frac{x_v-y_v+3z_v}{11}+y_v=\frac{+x_v+10y_v+3z_v}{11}$

$z_H=-\frac{3x_v-3y_v+9z_v}{11}+z_v=\frac{-3x_v+3y_v+2z_v}{11}$

~~(cambiare i segni)~~

V' tale che H sia il punto medio di VV'

$\frac{x_v+x_{v'}}{2}=x_H$ $\frac{y_v+y_{v'}}{2}=y_H$ $\frac{z_v+z_{v'}}{2}=z_H$

$x_{v'}=2x_H-x_v=\frac{9x_v+2y_v-6z_v}{11}$

$y_{v'}=2y_H-y_v=\frac{+2x_v+9y_v+6z_v}{11}$

$z_{v'}=2z_H-z_v=\frac{-6x_v+6y_v+-7z_v}{11}$

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & -2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$U = \mathrm{Span}(e_1 + e_3) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

riflessione rispetto al piano $x + z = 0$ e poi cambiare di segno

$$x = \lambda + x_v$$
$$y = y_v$$
$$z = \lambda + z_v$$

$$2\lambda + x_v + z_v = 0 \qquad \lambda = -\frac{x_v + z_v}{2}$$

$$x_H = \frac{x_v - z_v}{2} \qquad x_{v'} = 2x_H - x_v = -z_v$$

$$y_H = y_v \qquad y_{v'} = 2y_H - y_v = y_v$$

$$z_H = \frac{-x_v + z_v}{2} \qquad z_{v'} = 2z_H - z_v = -x_v$$

$$\mathrm{Rif}_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Rif}_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$