ESERCIZI SU PRODOTTI SCALARI

Titolo nota 02/05/2018

3,25 $\mathbb{R}^3$ $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

$W = \{x+y+z=0\}$

1a) Base ortonormale in U e in W

Base di U ortogonale $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ e un vettore

del tipo $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha\\2\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=0$ $\alpha+\beta+4\alpha+0=0$

$5\alpha+\beta=0$ $\alpha=1$ $\beta=-5$ ad esempio

$\begin{pmatrix}-4\\2\\-10\end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\right\}$ è una base <u>ortogonale</u> di U

$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$ $\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+1+25}=\sqrt{30}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortonormale di U

1b) Base di W parto da $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; prendo $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\begin{cases}a+b+c=0\\a\cdot1+b\cdot0+c\cdot(-1)=0\end{cases}$ $\begin{cases}a+b+c=0\\a-c=0\end{cases}$ $2a+b=0$ $c=a$

$b=-2a$ $c=a$ $a=1$, ad esempio $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ è ok

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortogonale di W, ma non ortonormale

$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2}$ $\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{6}$ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è

una base ortonormale di W.

② $\{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$

tale che $v_1 \in U \cap W$ $v_2 \in U$ $v_3 \in W$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \in W$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha\\2\beta\end{pmatrix}\in W \rightarrow (\alpha+\beta)+2\alpha+2\beta=0$$

$$3\alpha+3\beta=0 \qquad \beta=-\alpha$$

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} \in U\cap W$$

$U \cap W$ ha dimensione 1 → ho 2 scelte possibili se voglio $\|v_1\|=1$

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha\\2\beta\end{pmatrix}\cdot v_1=0 \Rightarrow 0+2\alpha-2\beta=0 \Rightarrow \alpha=\beta$$

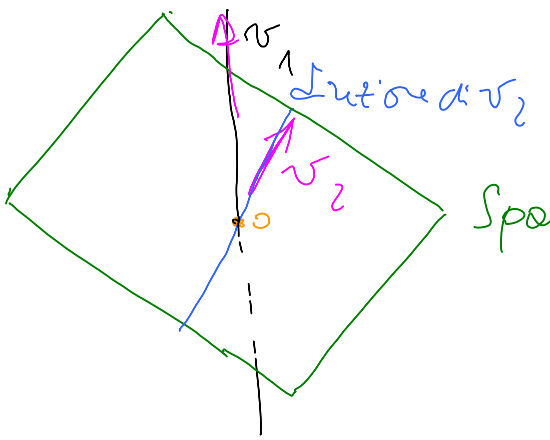
(=1 ad esempio)

$$\searrow \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \text{ poi normalizzo } \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=v_2$$

$$v_3=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 & v_3\in W\\ a+b+c=0 & v_2\perp v_3\\ b-c=0 & v_1\perp v_3\end{cases}$$

$$b=c \qquad a=-2c \qquad v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

8 basi cambiando i versi in tutti i modi possibili



$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

3.32 PROIETTORI $P: V \to V$ tali che $P^2=P$, allora

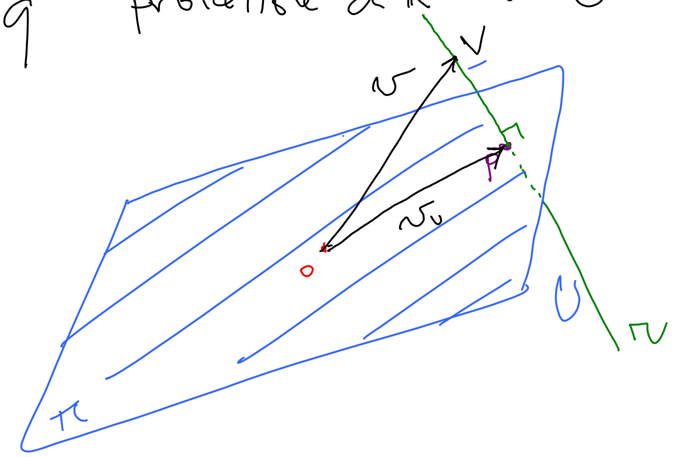
P è detto proiettore

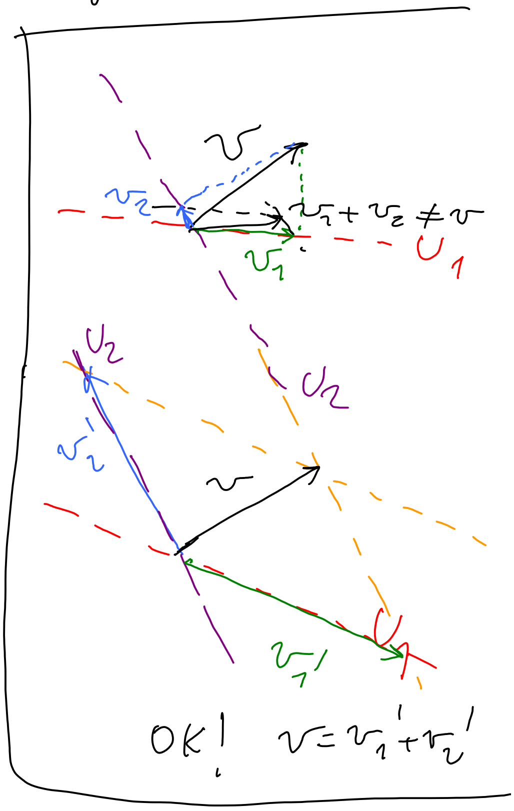
$p^2 - p = 0$

$\mathbb{R}^3 \qquad U = \{4x - 3y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

p proiettore di $\mathbb{R}^3$ su U (ortogonale)

q proiettore di $\mathbb{R}^3$ su $U^\perp$





$U = \{ax + by + cz = 0\} \qquad rk(a\ b\ c) = 1$

il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è $\perp$ a tutti i vettori di U (p.s. euclideo)

$U = \{4x - 3y + z = 0\} \qquad v_U = \begin{pmatrix} x_{v_U} \\ y_{v_U} \\ z_{v_U} \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$

$4x_{v_U} - 3y_{v_U} + z_{v_U} = 0$

$r: \begin{cases} x = 4\lambda + x_v \\ y = -3\lambda + y_v \\ z = 1 \cdot \lambda + z_v \end{cases} \qquad r \cap \pi$

$4(4\lambda + x_v) - 3(-3\lambda + y_v) + (\lambda + z_v) = 0$

$(16 + 9 + 1)\lambda + 4x_v - 3y_v + z_v = 0$

$\lambda = -\frac{1}{26}(4x_v - 3y_v + z_v)$

$x_{v_U} = -\frac{4}{26}(4x_v - 3y_v + z_v) + x_v = \frac{10x_v + 12y_v - 4z_v}{26}$

$y_{v_U} = +\frac{3}{26}(4x_v - 3y_v + z_v) + y_v = \frac{12x_v + 17y_v + 3z_v}{26}$

$z_{v_U} = -\frac{1}{26}(4x_v - 3y_v + z_v) + z_v = \frac{-4x_v + 3y_v + 25z_v}{26}$

Possiamo scrivere la matrice associata

$$p = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 10 & 12 & -4 \\ 12 & 17 & 3 \\ -4 & 3 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$p^2 = p$ provare per credere!

2^a soluzione: posso trovare q

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$q(v) = (v \cdot \hat{u})\hat{u}$ fornisce il componente (ortogonale) di v lungo la retta che ha direzione data da $\hat{u}$

$$\frac{4x-3y+z}{\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4x-3y+z}{26}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{4x-3y+z}{26}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 16 & -12 & 4 \\ -12 & 9 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$q^2 = q$ provare per credere!

$$p + q = \mathbb{1} \qquad p = \mathbb{1} - q = \frac{1}{26}\left[\begin{pmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & -12 & 4 \\ -12 & 9 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 10 & 12 & -4 \\ 12 & 17 & 3 \\ -4 & 3 & 25 \end{pmatrix}$$

ok! Stesso di prima!

p è simmetrica, q è simmetrica

$p-q$ è simmetrica

(2) $f = p - q$ è simmetrica $\Rightarrow$ è diagonalizzabile

provate a vedere che ha autovalori $+1$ e -1

(3) determinare il sottosp. $W \perp U$ rispetto al p.s.

$$\langle x, y \rangle = {}^t x A y \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } U$$

$$(x_1\ x_2\ x_3)\big(A \big)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e lo stesso con} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \quad 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

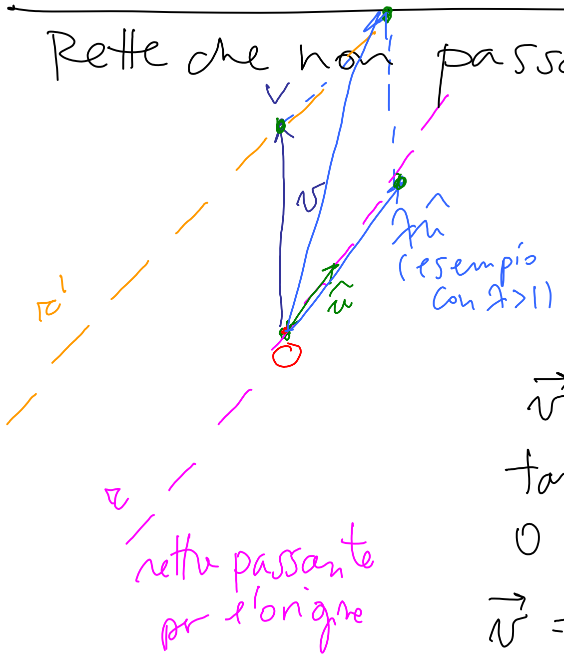
$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}-2\\10\\11\end{pmatrix} = \qquad -2x_1+10x_2+11x_3=0$$

$$23x_2+20x_3=0 \qquad x_2=20 \quad x_3=-23$$

$$x_1=\frac{10x_2+11x_3}{2}=\frac{200-253}{2}=-\frac{53}{2}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}-53\\40\\-46\end{pmatrix}=W$$
con $\lambda\in\mathbb{R}$

Rette che non passano per l'origine



$r' \parallel r$ (r' ha la stessa direzione di r)

Voglio che r' passi per V

$\vec v+\lambda\hat u$ al variare di λ ottengo tanti vettori $\vec v_\lambda$ che hanno origine in O e l'estremità libera sulla retta r'

$$\vec v=\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix} \qquad \hat u=\begin{pmatrix}\ell\\m\\n\end{pmatrix}$$

$$\ell^2+m^2+n^2=1$$

$$\begin{cases}x(\lambda)=\ell\lambda+x_v\\y(\lambda)=m\lambda+y_v\\z(\lambda)=n\lambda+z_v\end{cases}$$

equazioni parametriche di una retta nello spazio

Nel piano
$$\begin{cases}x=\ell\lambda+x_v\\y=m\lambda+y_v\end{cases}$$

$$x-x_v=\ell\lambda$$
$$y-y_v=m\lambda$$

$$m(x-x_v)=\ell(y-y_v)$$

$$mx-\ell y+\ell y_v-mx_v=0$$

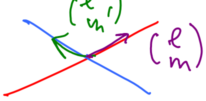
$$ax+by+c=0$$

$a=m$
$b=-\ell$
$c=\ell y_v-mx_v$

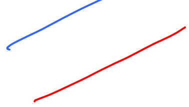
Nello spazio si potrà ottenere r come intersezione di due piani

---

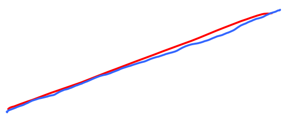
INCIDENTI



PARALLELE



COINCIDENTI



$r: \begin{cases} x = l\lambda + x_0 \\ y = m\lambda + y_0 \end{cases}$ $\qquad r': \begin{cases} x = l'\mu + x_0' \\ y = m\mu + y_0' \end{cases}$

$\alpha \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = 0$ INCIDENTI

$\det \begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix} \neq 0$ $\qquad r: ax + by + c = 0$

$r': a'x + b'y + c' = 0$

$$\boxed{rk \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2 \iff r \text{ è incidente a } r'}$$

$rk \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ parallele o coincidenti ?

$ax + by + c = 0$
$a'x + b'y + c' = 0$ coincidenti significa che $\exists k \neq 0$

tale per cui $k(ax + by + c) = a'x + b'y + c'$

cioè $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ e quindi

$rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$

Se $rk \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b \end{pmatrix} = 1$ e $rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ allora le rette sono parallele.

Cosa succede in 3D ?

INCIDENTI PARALLELE COINCIDENTI

SGHEMBE

$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$ condizione di parallelismo

$rk \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$ parallele o coincidenti ?

$$r_1 = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1' = 0 \end{cases}$$

$$x = l\lambda + x_0 \qquad x - x_0 = l\lambda$$
$$y = m\lambda + y_0 \qquad y - y_0 = m\lambda$$
$$z = n\lambda + z_0 \qquad z - z_0 = n\lambda$$

$$\lambda = \frac{x - x_0}{l} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{m(x-x_0)}{l} + y_0 \\ z = \dfrac{n(x-x_0)}{l} + z_0 \end{cases} \qquad l \neq 0$$

$$\begin{cases} mx - ly + ly_0 - mx_0 = 0 \\ nx - lz + lz_0 - nx_0 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = m$
$b_1 = -l$
$c_1 = 0$
$d_1 = ly_0 - mx_0$
$a_1' = n$
$b_1' = 0$
$c_1' = -l$
$d_1' = lz_0 - nx_0$

$$rk\begin{pmatrix} m & -l & 0 \\ n & 0 & -l \end{pmatrix} = 2$$, certamente questo sistema ha ∞^1 soluzioni

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \end{pmatrix} = 2$$ certamente i 2 piani sono incidenti e individuano una retta r_1 nello spazio

$$r_2: \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + d_2' = 0 \end{cases}$$

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}\right] 2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}\right] 2 \end{matrix}$$ può essere 2 o 3

A

2 parallele o coincidenti

3 incidenti o sghembe

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{pmatrix}$$ 2 3 4

A'

$rk(A)$	$rk(A')$	rette:
2	2	coincidenti
2	3	parallele
3	3	incidenti
3	4	sghembe