ESERCIZI SU PRODOTTI SCALARI

Titolo nota — 11/04/2017

3.6 V sp.v. $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$

(1) Dimostrare che $\forall v \in V$ v non nullo $\exists \langle\ \rangle$ g definito positivo su V tale che $g(v,v) = 1$

- g è definito (positivo, negativo) o indefinito una volta che si conosce come è definito sui vettori di base di V
- posso mettere v in base
- posso completare la base di V in modo tale da avere n vettori di base

$$\mathcal{B} = \{ v, \underbrace{v_2 \ldots v_n}_{n-1 \text{ vettori}} \}$$

$g(v,v) = 1$

$g(v, v_i) = 0 \quad \forall i = 2 \ldots n$

$$\boxed{g(v_i, v_j)} = \underbrace{\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}}_{\delta_{ij} \text{ delta di Kronecker}} \qquad i,j = 2 \ldots n$$

$$S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & & 1 & & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$S = I_n$

g è il p.s. Euclideo

anche se cambio base, g continua a essere definito positivo

(2) Mostrare che $\forall v, w \in V$ di vettori INDIPENDENTI, $\exists g$ definito positivo e tale che $g(v,w) = 0$

• Posso mettere sia v che w in una base di V

• Posso completare, in modo da ottenere una base di V, aggiungendo $n-2$ vettori

$$\mathcal{B} = \{ v, w, \underbrace{v_3 \dots v_n}_{n-2 \text{ vettori}} \}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

$g(v,v) = 1$

$g(v,w) = g(w,v) = 0$

$g(w,w) = 1$

$g(v_i, v) = 0 \quad \forall i = 3 \dots n$

$g(v_i, w) = 0 \quad \forall i = 3, n$

$$g(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 3 \dots n$$

$\boxed{S \text{ è di nuovo il p.s. euclideo, def. pos.}}$

Esercizio 3.7 $\quad \mathbb{R}_2[x]$ polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali, sul corpo dei reali

$p, q \in \mathbb{R}_2[x] \qquad \mathcal{B} = \{1, x, x^2\} \qquad \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

$p(x) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 \qquad q(x) = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot x + q_2 \cdot x^2$

$$\langle p, q \rangle = p(0) \cdot q(0) + p'(0) q'(0) + p''(0) q''(0)$$

$W \subset \mathbb{R}_2[x] \qquad W = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0 \}$

$p_0 + p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_0 = -(p_1 + p_2)$

• Mostrare che W è un s.s.v. di $\mathbb{R}_2[x]$

$$p(x) = -(\boxed{p_1} + \boxed{p_2) \cdot 1} + \boxed{p_1 \cdot x} + \boxed{p_2 \cdot x^2} \quad \in W$$

$p(x) = \underbrace{p_1(x-1)}_{\in \mathbb{R}_2[x]} + \underbrace{p_2(x^2-1)}_{\in \mathbb{R}_2[x]} \longrightarrow \in \mathbb{R}_2[x]$

$\overset{w_1}{x-1}$ e $\overset{w_2}{x^2-1}$ sono 2 vettori linearmente indipendenti

$$rk\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad B' = \{w_1, w_2, 1\}$$

altra base di $\mathbb{R}_2[x]$

$W = \text{span}\{w_1, w_2\} \quad \dim(W) = 2$

- Determinare $W^\perp$ (rispetto al $\langle \ \rangle$ dato)

$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}_2[x] : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$

Basta verificare questo $\forall$ vettore della base di W

$v = v_0 \cdot 1 + v_1 \cdot x + v_2 \cdot x^2 \in V$ (generico vettore di $\mathbb{R}_2[x]$)

$$\begin{cases} \langle v, w_1 \rangle = 0 \\ \langle v, w_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Determinare quali v_0, v_1, v_2 vanno bene!

$v' = v_1 + 2x v_2$ | $w_1' = 1 \quad w_1'' = 0$

$v'' = 2v_2$ | $w_2' = 2x \quad w_2'' = 2$

$$\begin{cases} v_0(-1) + v_1 \cdot 1 + 2v_2 \cdot 0 = 0 \\ v_0(-1) + v_1 \cdot 0 + 2v_2 \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -v_0 + v_1 = 0 \\ -v_0 + 4v_2 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = v_0 \qquad v_2 = v_0/4$

$v(x) = v_0 \cdot 1 + v_0 \cdot x + \frac{v_0}{4} \cdot x^2 = v_0\left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)$

$W^\perp = \text{Span}\{1 + x + x^2/4\} \qquad \dim(W^\perp) = 1$

Esercizio 3.8 $\quad M(2)$

$\langle A, B\rangle = tr({}^tAB)$

- Dato $W \subset M(2)$, è sempre vero che $M(2) = W \oplus W^\perp$?

$${}^tA = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}$$

$$tr\left[\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}\right] = xx' + zz' + yy' + tt'$$

$$\langle A, A\rangle = tr({}^tA \cdot A) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \iff A = 0$$

quindi non esistono vettori $\perp$ a sé stessi

A rigore, bisogna mostrare anche che $W \cup W^\perp = M(2)$

$W = span\{M_1, M_2, \dots M_q\}$ $\quad q \leq 4$, lin. indip

$W^\perp$ ha dimensione $4-q$

- W = s.s.v. formato dalle matrici simmetriche

determiniamo $W^\perp$

$\dim(W) = 3$

generico $\in M(2)$

$$tr\left[\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ y & t \end{pmatrix}}_{\in W}\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}\right] = xx' + \boxed{yz'} + \boxed{yy'} + tt' = 0$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ t' = 0 \\ y' + z' = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & y' \\ -y' & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall x, y, t$$

$y'\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ MATRICI $\qquad \dim W^\perp = 1$

- W = s.s.v. formato dalle matrici diagonali $\quad \dim(W) = 2$

$$tr\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}\right] = 0 \qquad \forall x, t$$

$\hookrightarrow = xx' + tt' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$ $\quad y', z'$ sono liberi

$W^\perp = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ z' & 0 \end{pmatrix}$ "ANTIDIAGONALI" $\quad \dim W^\perp = 2$

ES. 3,9 $\quad \mathbb{R}_2[x] \quad \langle p,q\rangle = p(0)q(0) - p(1)q(1)$

$p(x) = p_0 \cdot 1 + p_1 x + p_2 x^2 \quad p(0) = p_0 \quad p(1) = p_0 + p_1 + p_2$

$q(x) = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot x + q_2 \cdot x^2 \quad q(0) = q_0 \quad q(1) = q_0 + q_1 + q_2$

$$\langle p,q\rangle = \cancel{p_0 q_0} - (\cancel{p_0 q_0} + p_0 q_1 + p_0 q_2 + p_1 q_0 + p_1 q_1 + p_1 q_2 + p_2 q_0 + p_2 q_1 + p_2 q_2) =$$

$$= -(p_0 q_1 + p_0 q_2 + \boxed{p_1 q_0} + p_1 q_1 + p_1 q_2 + \boxed{p_2 q_0} + p_2 q_1 + p_2 q_2)$$

$$= (p_0 \; p_1 \; p_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

- determinare il radicale del $\langle \; \rangle$ dato

Insieme dei vettori $\perp$ a tutti gli altri

$$\langle p,q\rangle = -[q_0(p_1+p_2) + q_1(p_0+p_1+p_2) + q_2(p_0+p_1+p_2)] = 0 \quad \forall q_0, q_1, q_2$$

$$\begin{cases} \boxed{p_1+p_2} = 0 \\ p_0 + \boxed{p_1+p_2} = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} p_0 = 0 \\ p_2 = -p_1 \end{matrix}$$

$$p(x) = p_1 x - p_1 x^2 = p_1(x - x^2)$$

$$V^\perp = \mathrm{Span}(x - x^2) = \text{radicale del } \langle \; \rangle \text{ dato}$$

- Determinare un polinomio isotropo che non sia contenuto nel radicale

Si osserva che $1 \notin V^\perp$, però $\langle 1, 1\rangle = 0$

quindi 1 è isotropo e non appartiene al radicale

- I vettori isotropi formano un sottospazio vettoriale? NO

BASTA TROVARE UN CONTROESEMPIO

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_0p_1 + 2p_0p_2 + 2p_1p_2 = 0$$

$$(p_1+p_2)^{\cancel{2}} = -2p_0\cancel{(p_1+p_2)} \qquad p_1+p_2 \neq 0$$

$$p_0 = -\frac{p_1+p_2}{2}$$

$$W = \left\{ -\frac{p_1+p_2}{2} + p_1x + p_2x^2 \right\}$$

$$\langle p, p\rangle = \left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{p_1+p_2}{2} + p_1 + p_2\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2 = 0 \quad \forall\, p_1, p_2$$

W è formato da vettori tutti isotropi

$$W = \text{span}\left\{ x - \frac{1}{2},\ x^2 - \frac{1}{2} \right\}$$ 2 vettori lin. indip.

$\dim W = 2$ $\qquad$ W è un s.s.v. di $\mathbb{R}_2[x]$

ESERCIZIO 3.10 $\qquad V = \mathbb{R}^3$

$$(x, x') = {}^t x\, S\, x' = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} x_3' \\ x_2' \\ x_1' \end{pmatrix} = x_1x_3' + x_2x_2' + x_3x_1'$$

(1) $\langle\ \rangle$ è degenere? $x_1 x'_3 + x_2 x'_2 + x_3 x'_1 = 0$

$\forall\ x_1\ x_2\ x_3$

$$\begin{cases} x'_3 = 0 \\ x'_2 = 0 \\ x'_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{l'unico } x' \perp \text{ a qualunque } x \in \mathbb{R}^3 \text{ è } 0_{\mathbb{R}^3}$$

quindi il radicale è banale e $\langle\ \rangle$ non è degenere

(2) $\exists\ V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\dim(V) = 1$ e $V \subset V^\perp$

$v \in V$ $\quad v_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 v_3 + x_2 v_2 + x_3 v_1 = 0 \right\}$$

se voglio che $v \in V^\perp$ $\quad x_1 \rightarrow \alpha v_1$ $\rightarrow$ $\alpha v_1 v_3 + \alpha v_2^2 + \alpha v_3 v_1 = 0$

$x_2 \rightarrow \alpha v_2$

$x_3 \rightarrow \alpha v_3$ $\quad \alpha(2v_1 v_3 + v_2^2) = 0$

$v_2^2 = -2 v_1 v_3$ - Ad esempio scelgo $v_1 = -2$ $v_3 = 1$

$v_2 = 2$

oppure $v_2 = -2$

$$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Determinate i vettori isotropi (U)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 x_3 + x_2^2 = 0 \right\} \qquad x_1 x_3 \leq 0$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \pm\sqrt{-2x_1 x_3} \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1 x_3 \leq 0 \right\} \qquad \text{non è s.s.v. di } \mathbb{R}^3$$

(4) Determinare un piano W tale che $\langle\ \rangle_W$ sia definito positivo

$W = \text{span}\{v, w\}$ $\qquad s = \alpha v + \beta w$

$\langle s, s \rangle > 0 \quad \forall \alpha, \beta$ $\qquad = \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 \\ \alpha v_2 + \beta w_2 \\ \alpha v_3 + \beta w_3 \end{pmatrix}$

$\langle s, s \rangle = \cancel{2}(\alpha v_1 + \beta w_1)(\alpha v_3 + \beta w_3) + \cancel{2}(\alpha v_2 + \beta w_2)^2 > 0$

$\forall \alpha, \beta$

$= \alpha^2 (v_2^2 + v_1 v_3) + \beta^2 (w_2^2 + w_1 w_3)$

$+ \alpha\beta (v_1 w_3 + w_1 v_3 + 2 v_2 w_2) > 0$

$$\begin{cases} v_2^2 + v_1 v_3 > 0 \\ w_2^2 + w_1 w_3 > 0 \\ v_1 w_3 + w_1 v_3 + 2 w_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = 1 \quad w_1 \; 0$

$v_2 = 1 \quad w_2 \; -1$

$v_3 = 0 \quad w_3 \; +2$

v e w sono linearmente indip, quindi ok.

(5) piano $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\langle \; \rangle_W$ sia degenere

$W = \text{span}\{e_1, e_2\} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(x_1 \; x_2 \; 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 x_2'$$

$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ il radicale è span $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se restringete $\langle \; \rangle$ a W, in W c'è un radicale non banale