ES. RIPASSO E PROD. SCAL.

Titolo nota — 28/03/2017

2 matrici A e B

A diagonalizzabile
B "

$\Big\}$ $A \times B$ non diagonalizzabile

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ bx + dy = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} az + ct = 0 \\ bz + dt = 1 \end{cases}$$

$\Delta = ad - bc$

$z = -c/\Delta \qquad x = (d-c)/\Delta$

$t = a/\Delta \qquad y = (a-b)/\Delta$

$$\boxed{A = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d-c & a-b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d-c & a-b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = *$$

$$* \ \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} ad - \cancel{ac} + \cancel{ac} - bc & \cancel{bd} - bc + ad - \cancel{bd} \\ -\cancel{ac} + \cancel{ac} & -bc + ad \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & \Delta \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a=2 \quad b=3 \quad c=4 \quad d=1$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = -10$

$$A = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -\frac{1}{10}$

A e B sono diagonalizzabili

$\lambda_A^2 - \frac{1}{10}\lambda_A - \frac{1}{10} = 0$ $\qquad 10\lambda_A^2 - \lambda_A - 1 = 0$

$\lambda_A = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$ reali e distinti

$\lambda_B^2 - 3\lambda_B - 10 = 0$

$\lambda_B = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} < \begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}$ reali e distinti

---

"Patologie" varie

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non diagonalizzabili

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalizzabile !

$\lambda^2 - 3\lambda + 1$

$\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$ reali e distinti

Altra "patologia"

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non diagonalizzabile

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizzabile

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 1 \qquad \lambda = \pm 1$ reali e distinti

diagonaliz.

$\lambda^2 - \lambda - 1$

$\frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$ reali e distinti

$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$

$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \Delta = 0$

ES. 2.11

$A \quad m \times m \qquad A^n = I$ Sp. vett. su $\mathbb{C}$

A ammette una forma di Jordan

$\exists M$ tale che $M^{-1}AM = J$

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_K \end{pmatrix}$$

B_i matrice $m_i \times m_i$

$\sum_{i=1}^{K} m_i = m$

$\exists\, m_i > 1$

$A^n = I \qquad A = MJM^{-1}$

$$A^n = (MJM^{-1})^n = \underbrace{(MJM^{-1})(MJM^{-1}) \cdots (MJM^{-1})}_{n \text{ volte}}$$

$$MJ(\underbrace{M^{-1}M}_{I})J(\underbrace{M^{-1}M}_{I}) \cdots JM^{-1} = MJ^nM^{-1} = I$$

$\uparrow$ per ipotesi

quindi

$J^n = I$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

m_i non possono essere maggiori di 1

perchè

$$J^n = \begin{pmatrix} B_1^n & & \\ & B_2^n & \\ & & \ddots B_K^n \end{pmatrix} \neq I$$ se $\exists$ un blocco di dim > 1

per $i = 1$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \text{altri blocchi} \end{pmatrix}$$

$Ae_2 = e_1 + \lambda e_2$

$A^2 e_2 = A(e_1 + \lambda e_2) = \lambda e_1 + \lambda(e_1 + \lambda e_2)$

$A^n e_2 = \lambda^n e_1 + (n\lambda)\, e_2$

$\nwarrow \neq 0$

$J =$ Diagonale

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i^n = 1 \quad \forall i = 1 \dots m$$

λ_i sono le radici n-esime dell'unità

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\lambda^2 - 1 = 0$ diagonalizzabile $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} e_1 \to e_2 \\ e_2 \to e_3 \\ e_3 \to e_1 \end{matrix}$$

A^3

$$e_1 \xrightarrow{A} e_2 \xrightarrow{A} e_3 \xrightarrow{A} e_1 \qquad e_1 \xrightarrow{A^3} e_1$$

$$e_2 \xrightarrow{A} e_3 \xrightarrow{A} e_1 \xrightarrow{A} e_2 \qquad e_2 \xrightarrow{A^3} e_2$$

$$e_3 \xrightarrow{A} e_1 \xrightarrow{A} e_2 \xrightarrow{A} e_3 \qquad e_3 \xrightarrow{A^3} e_3$$

$A^3 = I$ $\qquad \lambda^3 - 1 = 0$ $\qquad \lambda_1 = 1$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore corrispondente a $\lambda_1 = 1$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

rot $= \frac{2\pi}{3}$ oppure 120°

ESERCIZI SUI PRODOTTI SCALARI

$\mathbb{R}^2 \ \{e_1, e_2\}$ $\quad {}^t x S y \quad x, y \in \mathbb{R}^2$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1 + e_2, \ e_1 - e_2\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S'_{(\mathcal{B})} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(f_1, f_1) = \overset{-1}{g(e_1, e_1)} + \overset{0}{g(e_1, e_2)} + \overset{0}{g(e_2, e_1)} + \overset{-1}{g(e_2, e_2)} = -1 + (+1) = 0$$

${}^t M S M =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$g(f_2, f_2) = g(e_1, e_1) - g(e_1, e_2) - g(e_2, e_1) + g(e_2, e_2) = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$$

$$g(f_1, f_2) = g(e_1, e_1) - g(e_1, e_2) + g(e_2, e_1) - g(e_2, e_2) = -1 + 0 + 0 - (+1) = -2$$

$V_1 = \{\lambda(e_1 + e_2)\}$

$V_2 = \{\mu(e_1 - e_2)\}$

2 sottoinsiemi di vettori isotropi

$$(x \ \ y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

TUTTE SOL $\longrightarrow$ $-x^2 + y^2 = 0 \quad (y - x)(y + x) = 0$

$$y = x \ \vee \ y = -x$$

$v = x e_1 + y e_2$

$v_1 = x e_1 + x e_2 = \overset{\lambda}{x}(e_1 + e_2)$

$v_2 = x e_1 - x e_2 = \underset{\mu}{x}(e_1 - e_2)$

non ce ne sono altri

ES. 3.2

$V = M(n)$ $\qquad f(A,B) = tr(AB)$

$f: V \times V \to \mathbb{R}$

$g(A,B) = tr({}^tAB)$

$g: (V \times V) \to \mathbb{R}$

1) Mostrare che sono prodotti scalari

$f(A_1 + A_2, B) \overset{?}{=} f(A_1, B) + f(A_2, B)$

$\downarrow$

$tr[(A_1 + A_2) \cdot B] = tr[A_1 \cdot B + A_2 \cdot B] = tr(A_1 \cdot B) +$
$+ tr(A_2 \cdot B) = f(A_1, B) + f(A_2, B)$

$f(\lambda A, B) \overset{?}{=} \lambda f(A,B)$

$tr((\lambda A)B) = tr(\lambda(AB)) = \lambda tr(AB) = \lambda f(A,B)$

$f(A,B) = f(B,A)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$tr(AB) = tr(BA)$ per una proprietà della traccia!

$(AB)_{ij} \neq (BA)_{ij}$, ma la traccia resta la stessa!

Per g la dimostraz. è identica (t non influisce!)

---

(2) g è definito positivo (da dimostrare)

$A \in M(n)$, $A \neq 0$ bisogna mostrare che $g(A,A) > 0$

$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik} (A)_{ki} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (A_{ki})^2$$ che non può essere negativa ed è nulla se e solo se $A_{ki} = 0$ $\forall k$ e $\forall i$, contro l'ipotesi $A \neq 0$

---

(3) f è definito positivo? NO

Basta un controesempio, lo trovo "a forza"

$n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ & d^2+bc \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Tr}(A^2) = a^2+d^2+2bc$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \mathrm{Tr}(A^2) = -2 < 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \mathrm{Tr}(A'^2) = 1+1-2 = 0$

$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \mathrm{Tr}(A''^2) = 2 > 0$

3.3 $\mathbb{R}_2[x]$ polinomi a coeff. reali di grado ≤ 2

$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$

$\{1, x, x^2\}$

$$S = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \end{array}$$

$1 \quad +1 \quad 1$

$\quad -1$

$p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$

$q = q_0 + q_1 x + q_2 x^2$

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & S & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

trovare i $(p_0\ p_1\ p_2)$ tali che sia vera $\forall\ q_0\ q_1\ q_2$.

$$\cancel{2}(p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_0 q_2 + q_0 p_2) = 0$$

$$q_0(p_0 + p_2) + p_1 q_1 + q_2(p_0 + p_2) = 0 \qquad \forall\ q_0, q_1, q_2$$

$$\begin{cases} p_0 + p_2 = 0 \\ p_1 = 0 \\ p_0 + p_2 = 0 \end{cases}$$

$p_2 = -p_0$

$p_1 = 0$

$1 \cdot p_0 + x \cdot p_1 + x^2 \cdot (-p_0) =$

$= p_0(1 - x^2)$

Il radicale è formato da tutti polinomi della forma $p_0(1-x^2)$.

3.4 g su V

Mostrare che se tutti i vettori sono isotropi, allora g è banale

$$(v,v) = 0\ \forall v \in V \Rightarrow (v,w) = 0\ \forall v, w \in V$$

$$g(v+w, v+w) \underset{\forall v,w}{=} g(v,v) + g(w,w) + 2g(v,w)$$

$g(v+w,v+w) \to 0$, $g(v,v) \to 0$, $g(w,w) \to 0$ per ipotesi

$$\Rightarrow 2g(v,w) = 0 \Rightarrow g(v,w) = 0 \quad \forall (v,w)$$

quindi g è banale!

② Se g è indefinito, allora $\exists$ un vettore isotropo non banale.

$\exists\, v : g(v,v) > 0$ ed $\exists\, w : g(w,w) < 0$

$\Rightarrow \exists\, u \neq 0$ tale che $g(u,u) = 0$

Si fa a "forza bruta" $u = \alpha u + \beta w$

$$g(u,u) = g(\alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w) =$$
$$= \alpha^2 g(v,v)_{<0} + \beta^2 g(w,w)_{<0} + 2\alpha\beta g(v,w) = 0$$

fissa $\beta = 1$ e calcolo α

discordi

$$\alpha^2 g(v,v) + g(\cancel{w},w) + 2\alpha g(v,w) = 0$$

$$\alpha = \frac{-g(v,w) \pm \sqrt{(g(v,w))^2 - g(v,v)g(w,w)}}{g(v,v)_{>0}}$$

$\Delta/4 > 0$

$$\alpha = \frac{-g(v,w) + \sqrt{\Delta/4}}{g(v,v)}$$

$$u = w + \frac{-g(v,w) + \sqrt{\Delta/4}}{g(v,v)} v$$

è isotropo