ESERCIZI GEOMETRIA

Titolo nota 14/03/2017

ES. 8 P 31 SERNESI Matrici nilpotenti

A è detta nilpotente se $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$

quadrata di ordine n

$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente $a=0$ ovvio!

$a \neq 0$

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $k=2$ $A^2 = 0$

$A' = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ è nilpotente A'^2 A'^3 ......

$j-i=1$

a A_{12} $2-1=1$

c A_{23} $3-2=1$

A_{ij} $j-i=1$

$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A'^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A'^3 = 0$

in generale, se A è strettamente triang. sup. di ordine n $A^n = 0$

$A = A_{ij}$ $A_{ij} = 0$ se $j \leq i$ triangolare stretta

$A^2 = \sum_{l=1}^{n} A_{il} A_{lj}$

$A_{il} = 0$ se $l \leq i$

$A_{lj} = 0$ se $j \leq l$

$(A^2)_{ij} = 0$ se $j-i=1$ ...

$(A^3)_{ij} = 0$ se $j-i=1,2$ ...

Rifaccio 1,13

Se $T: V \to V$ è diagonalizzabile, allora

$$V = Ker(T) \oplus Im(T)$$

- Se T è diagonalizzabile, allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V formata da autovettori di T

$$\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\} \qquad T(e_i) = \lambda_i e_i$$

$\lambda_i = 0 \Rightarrow e_i \in Ker(T)$

$\lambda_i \neq 0 \Rightarrow e_i \notin Ker(T)$

- $dim(V) = n \qquad n_1 = m_a(0) = m_g(0) \quad n_1 \geq 0$

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V) = n$$

$$n_2 = n - n_1 = dim(Im(T))$$

Esempio

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(e_1) = 0 \qquad T(e_2) = e_1$

$Ker(T) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$Im(T) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$1 + 1 = 2$

$Ker(T) = Im(T)$

$$T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ n_1\{ \\ \\ n_2\{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}^{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_{n_1+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{matrix}}_{n_2} \end{array}\right)$$

$v \in V_n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i}_{\in Ker(T)} + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n} \alpha_i e_i}_{\in Im(T)}$$

in maniera unica, una volta che $\mathcal{B}$ è fissata

$T(e_i) = \lambda_i e_i \neq 0_V$

se $i > n_1$

$$e_i = \frac{1}{\lambda_i} T(e_i) = T\left(\frac{e_i}{\lambda_i}\right)$$

Ogni $e_i \in Im(T)$ per $i > n_1$

$$V_0 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i \qquad V_1 = \sum_{i=n_1+1}^{n} \alpha_i e_i \qquad V = V_0 + V_1$$

$$T(V) = T(V_0 + V_1) = T(V_0) + T(V_1) = 0_V + \underset{\in \operatorname{Im} T}{W}$$

1.16 $\quad T: V \to V \qquad T^2 = T$

$V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$

$T(v) = \lambda v \ (\lambda \neq 0) \qquad T(T(v)) = T(\lambda v)$

$T(v) = 0 \qquad\qquad T(v) = \lambda (T(v)) \qquad\qquad T(v) \neq 0_V \Rightarrow \lambda = 1$

$T(T(v)) = 0 \qquad\qquad \lambda = 0$ è possibile

Gli unici autovalori possibili sono 0 e 1

$$\boxed{\begin{array}{c} T^2 - T = 0 \\ \lambda^2 - \lambda = 0 \end{array}}$$

Base di V $\{\underbrace{e_1 \dots e_{n_1}}_{\text{nucleo}}, \underbrace{e_{n_1+1} \dots e_n}_{?}\}$

$n_1 = \dim(\operatorname{Ker}(T))$

$V_0 = \{v \in V : T(v) = 0 \cdot v = 0_V\} = \operatorname{Ker}(T)$

$V_1 = \{v \in V : T(v) = v \cdot 1\}$

$W \in \operatorname{Im}(T) \qquad \exists\, v \in V : \quad W = T(V)$

$T(W) = T(T(V)) = T(V)$

$T(W) - T(V) = 0 \qquad T(W - V) = 0 \qquad W - V \in \operatorname{Ker}(T)$

$W - V = \underset{\in \operatorname{Ker}(T)}{v_0}$

$v = \underset{\in \operatorname{Im}(T)}{W} + \underset{\in \operatorname{Ker}(T)}{(-v_0)}$

Devo dimostrare che vale $\forall v \in V$

$T(v) = \lambda v \qquad \lambda \neq 1$

$T(T(v)) = \lambda^2 v \qquad\qquad \lambda^2 v = \lambda v \qquad\qquad \lambda = 0, 1$

$\parallel$

$T(v) = \lambda v$

Se $v \in V_1 \quad T(v) = v, \ v \in \operatorname{Im}(T)$

Se $v \in \operatorname{Im}(T)$ posso dire che $T(v) = v$?

Se $v \in Im(T)$, allora $\exists\, w : T(w) = v$

$T(v) = T(T(w)) = T(w)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

fissare una base $\mathcal{B}$ in V e scrivere $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ che chiamo M

$$T(v) \quad (M)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$T(T(v)) = (M)(M)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(M)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (M^2)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(M^2 - M)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 \quad \forall v \in V$$

$M(M - \mathbb{1}_n) = 0$ purtroppo da questo non si può dire che M è diagonale e fatta da 1 e 0 sulla diagonale!

SE $v = v_0 + v_1$ in modo univoco $\forall v \in V \Rightarrow$ ALLORA $V = V_0 \oplus V_1$

questo funziona

$T(v) = T(v_0 + v_1) = T(v_0) + T(v_1) = 0_V + v \in Im(T)$

Se $v \in Ker(T)$, allora $v \notin Im(T)$

$T(T(v)) = 0 \qquad T(v) \in Ker(T)$

Se $v \notin Ker(T)$ allora v non è autovettore con autovalore nullo $T(v) \neq 0$

$$v = v_0 + v_1$$

$$T(v_0) = 0 \quad T(v_1) = v_1$$

$$T(T(v)) = T(v) = 0_V + v_1$$

1.12 è sempre vero che la composiz. di 2 endomorfismi diagonalizzabili è diagonalizzabile? NO

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} ae+bg=0 \\ af+bh=1 \\ ce+dg=0 \\ cf+dh=0 \end{cases}$$

$ae=-1$
$bg=1$

$$\begin{array}{cc} e_1+e_2 & e_1-e_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}$$

$a=1$ $\quad e=-1$ $\quad -c+d=0$ $\quad f+h=1$
$b=1$ $\quad g=1$ $\quad f+h=0$
$c=1$ $\quad d=1$

Cercate 2 matrici 2×2 che siano diagonalizzabili e che abbiano come prodotto una matrice non diagonalizzabile $\rightarrow$ Così si risolve l'1.12

$M^{-1}AM=D_1$ $\qquad D_1 D_2$ è diagonale
$N^{-1}BN=D_2$

non è I!

$M^{-1}AMN^{-1}BN$

1.17 $\quad T: V\to V \quad T\circ T = id \quad T^2 = \mathbb{1}$

$V = V_1 \oplus V_{-1}$ $\qquad \lambda$ autovalore

$T(v)=\lambda v \quad (T\circ T)v = \lambda^2 v = v$

$(\lambda^2-1)v=0 \ \forall v\in V \rightarrow \lambda=\pm1$

$$v = \underbrace{\frac{v+T(v)}{2}}_{v_1} + \underbrace{\frac{v-T(v)}{2}}_{v_{-1}}$$

$$T\left(\frac{v+T(v)}{2}\right) = \frac{1}{2}T(v)+\frac{1}{2}T(T(v)) = \frac{1}{2}T(v)+\frac{v}{2} = \frac{v+T(v)}{2}$$

$$\frac{v+T(v)}{2}\in V_1$$

$$T\left(\frac{v-T(v)}{2}\right) = \frac{1}{2}T(v)-\frac{1}{2}T(T(v)) = \frac{1}{2}T(v)-\frac{v}{2} = -\left(\frac{v-T(v)}{2}\right)$$

$$\frac{v - T(v)}{2} \in V_{-1} \qquad v = v_1 + v_{-1}$$

$$v = v_1' + v_{-1}' \qquad v_1' \neq v_1 \qquad v_{-1}' \neq v_-$$

$v = v_1 + v_{-1}$ già visto

$$0 = (v_1 - v_1') + (v_{-1} - v_{-1}')$$

$$v_1 - v_1' \in V_1$$
$$v_{-1} - v_{-1}' \in V_{-1}$$

$$T(v_1 - v_1') = v_1 - v_1'$$
$$T(v_{-1} - v_{-1}') = -v_{-1} + v_{-1}'$$

se $v \in V_1$ allora $v \notin V_{-1}$

se $v \in V_{-1}$, allora $v \notin V_1$

base $e_1 \dots e_{n_1}$ di V_1 $\qquad n_1 + n_2 = n$?

base $f_1 \dots f_{n_2}$ di V_2

$$T^2 = \mathbb{1}$$

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots \lambda^{n-1} + \dots + \det(T)$$

$$\lambda \to T \qquad p(T) = 0$$

$$\alpha T + \beta \mathbb{1} = 0$$

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 1) \qquad T^2 - \mathbb{1} = 0 \quad \text{funziona}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T^2 = \mathbb{1}}$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 1 =$$

$$-T + 5\mathbb{1} + 3T - \mathbb{1} \to 2T + 4\mathbb{1} = 0 \quad \text{falsa}$$

$p(\lambda)$ 4° grado $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 1$ $\lambda_4 = 1$

$\lambda^2(\lambda-1)^2$ $m_a(0) = 2$

$m_a(1) = 2$ A 4×4

$\boxed{(\lambda-1)^3(\lambda+1)^5}$

$m_A = (\lambda-0)^{d_1}(\lambda-1)^{d_2}$

$1 \leq d_1 \leq 2$ $1 \leq d_2 \leq 2$

$p_A(\lambda)$ $d_1 = 2$ $d_2 = 2$

2 possibilità 2 possibilità

$\lambda(\lambda-1)$
$\lambda^2(\lambda-1)$
$\lambda(\lambda-1)^2$
$\lambda^2(\lambda-1)^2$

4 possibili polinomi minimi

$A(A-1)$
$A^2(A-1)$
$A(A-1)^2$
$A^2(A-1)^2$

4 possibili sostituzioni della matrice

quella di grado più basso che fornisce come risultato una matrice nulla permette di capire chi è il polinomio minimo

$A^2 - A$
$A^3 - A^2$
$A^3 - 2A^2 + A$
$A^4 - 2A^3 + A^2$ $\leftarrow$ Hamilton (viene zero per forza!)