Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 7 gennaio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Per le prime 5 domande scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per la sesta potete usare anche il retro del foglio. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte alle prime 5 domande. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5 domande e alla domanda 6. Per essere ammessi all'orale è necessario inoltre rispondere correttamente alla sesta domanda.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Per quali valori di t la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}$$

E' diagonalizzabile per t

Domanda 2. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si determini il determinante di A^3.

Risposta: $\det(A^3) =$

Domanda 3. Sia $z = 3 + i$ e $w = 4 - i$. Si determini la parte reale di z/w

Risposta: $Re(z/w)=$

Domanda 4. Sia P il punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(1, 2, 3)$ e sia W il piano passante per l'origine ortogonale a $(-1, 1, 0)$. Si determini la proiezione Q di P su W.

Risposta: $Q =$

Domanda 5. Sia $F : \mathrm{Mat}_{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ una applicazione lineare surgettiva. Si determini la dimensione del nucleo di F.

Risposta: $\dim N(F) =$

Domanda 6. Cosa è un prodotto scalare su uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V? Si dia la definizione.

Compito di Geometria e algebra lineare del 7 gennaio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Sia g un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$. Dimostrare che se $g(v,v)=0$ per ogni $v \in V$ allora $g(v,w)=0$ per ogni $v,w \in V$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\1\end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\2\end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Sia U lo spazio vettoriale generato da u_1,u_2,u_3 e W lo spazio vettoriale generato da w_1,w_2,w_3. Si determini la dimensione di $U+W$ e quella di $U \cap W$.

Esercizio 3. Siano ℓ una retta e W un piano di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine con $\ell \subset W$. Sia R_θ una rotazione attorno alla retta ℓ di angolo θ e sia $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano W. Per quali valori dell'angolo θ l'applicazione $F = P \circ R_\theta$ è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia data la matrice

$$M = \begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\4 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice ortogonale G tale che $G^t\,M\,G$ sia diagonale. [Ricordiamo che una matrice ortognale è una matrice tale che $G\,G^t = I$]

1. Soluzione compito del 7 gennaio: prima parte

Risposta alla domanda 1: t diverso da $0, 1$.

Risposta alla domanda 2: 27

Risposta alla domanda 3: $11/17$

Risposta alla domanda 4: $(3/2, 3/2, 3)$

Risposta alla domanda 5: 5

Risposta alla domanda 6: Una funzione $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice un prodotto scalare se valgono le seguenti proprietà

- $g(v, w) = g(w, v)$ per ogni $v, w \in V$;
- $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$ per ogni $u, v, w \in V$;
- $g(u, \lambda v) = \lambda g(u, v)$ per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Punteggi: ammessi alla seconda parte senza errori 5 punti, con un errore 2 punti
Punteggi della seconda parte: 3,8,8,8

2. Soluzione compito del 7 gennaio: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Siano $v, w \in V$ allora

$$g(v, w) = \frac{g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Soluzione esercizio 2. Calcoliamo intanto la dimensione di U. Per fare questo calcoliamo il rango della matrice le cui colonne sono i generatori di U. Similmente facciamo con W. Riducendo a scalini otteniamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$, osserviamo inoltre che u_1, u_2 sono una base di U. Per calcolare la dimensione di $U + W$ osserviamo che u_1, u_2, w_1, w_2, w_3 sono dei generatori di $U + W$. Procediamo quindi come abbiamo fatto per U e W e calcoliamo il rango della matrice le cui colonne sono questi cinque vettori (si potevano prendere anche tutti e 6 e si sarebbe ottenuta una matrice un po' più grande).Riducendo a scalini si può ottenere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\dim U + W = 4$. Applicando la formula di Grassmann otteniamo infine che $\dim U \cap W = 1$.

Soluzione esercizio 3. Sia v_1, v_2, v_3 una base ortnormale di $\mathbb{R}^3$ tale che v_1 è una base di ℓ e v_1, v_2 è una base di W. La matrice associata a F rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico uguale a $-t(t - 1)(t - \cos\theta)$.

Se $\cos\theta \neq, 0, 1$, allora F ha tre autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

Se $\cos\theta = 1$ allora $\sin\theta = 0$ e v_1, v_2, v_3 sono una base di autovettori.

Se $\cos\theta = 0$ allora l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2. In questo caso $\sin\theta \neq 0$, quindi F ha rango 2 la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 in particolare è uguale a 1 e F non è diagonalizzabile.

Quindi F è diagonalizzabile se e solo se $\theta \neq \pm\pi/2$ come angolo.

Soluzione esercizio 4. Essendo la matrice simmetrica sappiamo che esiste una base ortonormale di autovettori. Determiniamo una tale base. Calcoliamo intanto gli autovalori della matrice M. Il polinomio caratteristico è uguale a

$$p_M(t) = (t-1)(t^2-25).$$

Quindi gli autovalori sono $1, 5$ e -5. Calcoliamo degli autovettori relativi a questi autovalori. Osserviamo che $Me_2 = e_2$ quindi e_2 è un autovettore relativo all'autovettore 1. Per calcolare gli autovettori relativi agli autovalori 5 e -5 studiamo i sistemi

$$M \cdot v = 5\, v \qquad M \cdot v = -5\, v.$$

Otteniamo che $v_2 = (2, 0, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 5 e che $v_3 = (1, 0, -2)$ è un autovettore relativo all'autovalore -5. Quindi $v_1 = e_2$, v_2, v_3 sono una base di autovettori. Sono ortgonali ma non sono tuttavia ortonormali. Normalizzando le lunghezze ad 1 otteniamo

$$u_1 = e_2 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1) \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)$$

sono una base ortonormale di autovettori. Quindi la matrice

$$G = [I]_e^u \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

é una matrice ortgonale e $G^t M G = G^{-1} M G = [L_M]_u^u$ è diagonale con $1, 5, -5$ lungo la diagonale.