Compito di Geometria e algebra lineare di lunedì 28 gennaio 2019: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Per le prime 5 domande scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Per la sesta potete usare anche il retro del foglio. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto le risposte alle prime 5 domande. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente ad almeno 4 delle prime 5. Per essere ammessi all'orale è necessario inoltre rispondere correttamente alla sesta domanda.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia $z = 3 + i$ e $w = 4 + 2i$. Si determini $\|z - w\|$.

Risposta: $\|z - w\| =$

Domanda 2. Si dica per quali valori di t la seguente matrice è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Risposta: $t =$

Domanda 3. Si calcoli il determinante della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risposta: $\det A =$

Domanda 4. Sia $P = (1, 2, 3)$ e sia W il piano di equazione $x + z = 0$ di $\mathbb{R}^3$. Si determini il punto Q simmetrico di P rispetto al piano W.

Risposta: $Q =$

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione con $\dim N(F) = 1$. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ tale che $U + \operatorname{Im} F = \mathbb{R}^5$ e $U \cap \operatorname{Im} F = 0$. Si determini la dimensione di U.

Risposta: $\dim U =$

Domanda 6. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Dare la definizione di autovalore di F.

Compito di Geometria e algebra lineare del 28 gennaio 2019: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 2 ore e 15 di tempo.

Esercizio 1. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare. Siano u, v, w tre autovettori relativi agli autovalori $0, 1, 2$. Si dimostri che sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -10 \\ -5 & 10 & -10 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\mathrm{Tr}(A^{1001})$.

Esercizio 3. Consideriamo i seguenti punti di $\mathbb{R}^2$

$$A = (0,0) \quad B = (0,5) \quad C = (1,3) \quad D = (2,2) \quad E = (6,-1) \quad F = (5,1).$$

Determinare una isometria di $\mathbb{R}^2$ che porta il triangolo DEF nel triangolo ABC. Descrivere tale isometria nella forma $f(x) = Lx + b$ calcolando esplicitamente L e b.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$g(f(t), g(t)) = f(-1)g(-1) - f(0)g(0) + f(1)g(1) - f(2)g(2)$$

a) Si determini la segnatura di g.
b) Determinare un sottospazio di V che sia uguale al suo ortogonale.

Soluzioni del compito del 28 gennaio: prima parte

Risposta alla domanda 1: $\sqrt{2}$.

Risposta alla domanda 2: $t = -1$.

Risposta alla domanda 3: 1.

Risposta alla domanda 4: $(-3, 2, -1)$.

Risposta alla domanda 5: 2.

Risposta alla domanda 6: λ è un autovalore di F se esiste un vettore $v \neq 0$ in V tale che $F(v) = \lambda v$.

Punteggi: ammessi alla seconda parte senza errori 5 punti, con un errore 2 punti. Abbiamo ammesso anche chi si è dimenticato di scrivere che v deve essere diverso da zero nella risposta alla domanda 6 rispettivamente con 3 e 0 punti.

Punteggi della seconda parte: 3,8,8,8

Soluzioni del compito del 28 gennaio: seconda parte

Soluzione esercizio 1. Supponiamo che $au + bv + cw = 0$. Applicando F e poi F^2 otteniamo

$$\begin{aligned} au + bv + cw &= 0 \\ bv + 2cw &= 0 \\ bv + 4cw &= 0 \end{aligned}$$

Sottraendo alla terza equazione la seconda otteniamo $cw = 0$ e quindi $c = 0$ perché, essendo un autovettore, $w \neq 0$. Sostituendo $c = 0$ nella seconda equazione otteniamo similmente che $b = 0$ e infine dall'equazione iniziale otteniamo $a = 0$.

Soluzione esercizio 2. Il polinomio caratteristico di A è uguale a

$$-t(t^2-25).$$

Quindi gli autovalori di L_A sono $0, 5, -5$ ed esiste una base v_1, v_2, v_3 tale che

$$[L_A]_v^v = B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata ad L_A^{1001} rispetto a questa base è uguale a

$$B^{1001} = \begin{pmatrix} (-5)^{1001} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{1001} \end{pmatrix}.$$

Infine osserviamo che la traccia di L_A^{1001} la possiamo calcolare in qualsiasi base quindi $\operatorname{Tr} L_A^{1001} = \operatorname{Tr} A^{1001} = \operatorname{Tr} B^{1001} = 0$.

Soluzione esercizio 3. Osserviamo che i lati AB e DE sono lunghi 5, che AC e DF sono lunghi $\sqrt{10}$ e che BC e EF sono lunghi $\sqrt{5}$. Quindi una isometria che porta DEF in ABC, porta D in A, E in B e F in C.

Come primo passo trasliamo il triangolo DEF portando D nell'origine. Determiniamo in questo modo un triangolo $D'E'F'$ con i seguenti vertici

$$D' = (0,0) \quad E' = (4,-3) \quad F' = (3,-1).$$

Ora effettuiamo una isometria lineare (che quindi lascia fisso $D' = A$) e che porta E' in B. Per esempio possiamo prendere la riflessione di direzione

$$u = B - E' = (-4, 8)$$

. La riflessione R associata ha come matrice associata rispetto alla base standard la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $R(E') = B$ e $R(F') = C$. L'isometria cercata è quindi $f(x) = R(x - D)$. Esplicitamente

$$f(x) = L \cdot x - L \cdot D = L \cdot x - \begin{pmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 4. Come per altri problemi simili è utile utilizzare una base f_{-1}, f_0, f_1, f_2 di V, con

$$f_i(i) = 1 \qquad f_i(j) = 0 \quad \text{ se } j \in \{-1, 0, 1, 2\} \text{ e } j \neq i.$$

L'esistenza di una tale base l'abbiamo vista in molti modi diversi in altri esempi, esplicitamente abbiamo

$$f_{-1}(t) = -\tfrac{1}{6}t(t-1)(t-2) \quad f_0(t) = \tfrac{1}{2}(t+1)(t-1)(t-2) \quad f_1(t) = -\tfrac{1}{2}(t+1)t(t-2) \quad f_2(t) = \tfrac{1}{6}(t+1)t(t-1)$$

Rispetto a questa base la matrice associata a b è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi la segnatura è $(2, 2, 0)$.

b) Osserviamo che poiché la forma è non degenere per ogni sottospazio U abbiamo $\dim U^\perp = 4 - \dim U$. Quindi se vogliamo un sottospazio W che sia uguale al suo ortogonale dovrà essere $\dim W = 2$. Sia g_1 e g_2 una base di W e sia $g_1 = af_{-1} + bf_0 + cf_1 + df_2$ e $g_2 = \alpha f_{-1} + \beta f_0 + \gamma f_1 + \delta f_2$. La condizione W uguale al suo ortogonale è quindi equivalente a $b(g_i, g_j) = 0$ per $i, j = 1, 2$. Più esplicitamente otteniamo

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta = \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0$$

Possiamo per esempio scegliere $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = \delta = 0$ in questo caso rimangono le equazioni

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a - b = 0.$$

Ricordandoci che g_1 deve essere linearmente indipendente con g_2 possiamo scegliere per esempio $a = b = 0$ e $c = d = 1$. Un sottospazio che verifica le condizioni richieste è quindi il sottospazio

$$W = \langle f_{-1} + f_0, f_1 + f_2 \rangle$$