

**Università di Pisa**  
**Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Meccanica**

Cognome e Nome:  
Corso di studi:  
Anno di iscrizione:  
Numero di matricola:

**Scritto n. 5 del 2015**

**Esercizio 1.** a) Si studi il seguente sistema reale nelle incognite  $x, y, z, t$  al variare del parametro  $a$

$$\begin{cases} ax + y + z + t = -1 \\ x + a^2 y + az + t = -1 \\ x + z + t = -1 \end{cases}$$

b) Per  $a = 1$ , indicata con  $A$  la matrice dei coefficienti del sistema e considerata l'applicazione lineare  $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si determini una base di  $\ker L_A$  e una base di  $\text{Im } L_A$ .

**Esercizio 2.** Si determinino le soluzioni  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$  del seguente sistema

$$\begin{cases} \exp(2w + z) + \exp(w) = 0 \\ \exp(z) = \exp(w) + 2 \end{cases}$$

**Esercizio 3.** a) Si determini l'equazione della sfera  $\mathcal{S}$  tangente nell'origine al piano  $\pi : x + y - z = 0$  ed avente centro  $C$  appartenente al piano assiale del segmento avente come estremi i punti  $A = (0, 0, 2)$  e  $B = (2, 2, 2)$ .

b) Si determinino i piani diametrali di  $\mathcal{S}$  contenenti il punto  $P = (2, 2, -2)$ .

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

a) Si studi la triangolabilità e diagonalizzabilità di  $A$  al variare del parametro reale  $k$ .

b) Per  $k = 0$  si determini un eventuale vettore  $x \in \mathbb{R}^3$  tale che  $Ax \neq 0$  e  $A^2x = 0$  oppure si motivi la non esistenza del suddetto vettore  $x$ .

**Esercizio 5.** Sia  $\mathcal{F}$  il fascio di coniche individuato da  $\gamma_1 : x^2 + y^2 - 2xy + x + y - 4 = 0$  e da  $\gamma_2 : xy - 4 = 0$  per il quale consideriamo l'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2xy + x + y - 4 + \lambda(xy - 4) = 0.$$

a) Si classifichino  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e si determinino le eventuali tangenti, centri di simmetria ed assi comuni a tutte le coniche del fascio.

b) Si determinino eventuali circonferenze ed iperboli equilateri di  $\mathcal{F}$ .

c) Si verifichi che la conica del fascio avente centro di simmetria in  $C = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$  è un'iperbole e si determinino le equazioni dei suoi asintoti.