Università di Pisa

Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Aerospaziale, Ingegneria Meccanica, Ingegneria della Sicurezza

Cognome e Nome:
Corso di studi:
Anno di iscrizione:
Numero di matricola:
E-mail

Scritto n.5 del 2013

Esercizio 1. a) Al variare del parametro reale h si studi il seguente sistema $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} h\,x + y + (h-2)\,z = 1 + h \\ x + h\,y + (h-2)\,z = 2\,h - 1 \\ h\,x - h\,z = h \end{cases}$$

b) Per $h = 0$, considerate la matrice completa A' associata al sistema $\mathcal{S}$ e l'applicazione lineare $L_{A'}$ di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$, si determini la controimmagine del vettore $(1, -1, 0)$. Tale controimmagine e' un sottospazio di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Determinare le soluzioni complesse (z, w) del sistema

$$\begin{cases} \exp(w) = z \\ z^2 - (2 - \sqrt{3}\,i)\,z + 1 - \sqrt{3}\,i = 0 \\ |w|^2 = (\ln\,2)^2 + \dfrac{25}{9}\,\pi^2 \end{cases}$$

Esercizio 3. a) Si determini l'equazione del luogo $\Phi_{r,s}$ dei punti dello spazio aventi distanze uguali dalle rette

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} y = 1 \\ x = -z. \end{cases}$$

b) Si classifichi $\Phi_{r,s}$.
c) Si determini e si studi il luogo $\Phi_{r,q}$ dei punti equidistanti dalla retta r del punto a) e dalla retta $q : \begin{cases} x = y \\ y = -z. \end{cases}$
d) Si classifichi, per entrambe le superfici $\Phi_{r,s}$ e $\Phi_{r,q}$, la sezione γ con il piano di equazione $3\,x - y + z = 0$.

Esercizio 4. Si considerino, al variare dei parametri h, $k \in \mathbb{R}$, le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,h-1 & 0 \\ 0 & h & k-1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare le matrici A che commutano con la matrice B verificando che esse dipendono da un solo paramentro e quindi si possono scrivere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,h-1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; studiare la diagonalizzabilita' di tali matrici al variare del paramentro h verificando che sono sempre triangolabili.
b) Determinare i valori di h per cui la matrice $A - I$ e' nilpotente ed il suo indice di nilpotenza.
c) Calcolare l'inversa di A in funzione di A^2, A ed I. (Suggerimento: calcolando $(A - I)^3$ si ha...)

Esercizio 5. Si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per il quale consideriamo l'equazione

$$2\,\lambda(x^2 - y^2 + x - y) + 2\,(x^2 - y - 1) = 0\,.$$

a) Si classifichino le due coniche γ_1 e γ_2 che generano il fascio e si determinino i punti base del fascio.
b) Si determinino le equazioni delle parabole del fascio, determinandone i vertici e gli assi di simmetria; si verifichi che ognuna passa per il vertice dell'altra e si dimostri che sono simmetriche rispetto ad una bisettrice degli assi cartesiani.
c) Si classifichino le coniche del fascio al variare del parametro λ.
d) Si determini il centro C_λ della generica conica a centro del fascio;
e) si verifichi che il luogo dei centri C_λ, al variare della conica a centro del fascio, e' un'iperbole, e se ne determini l'equazione.