Cognome
Nome
Matricola

Corso di laurea in Ing. Edile-Architettura
Compito scritto di Geometria – 16/04/2009

1. a) Discutere il numero di soluzioni del seguente sistema lineare reale, al variare del parametro reale k. (3.5 punti)
$$\begin{cases} (k+1)x + (k-k^2)z = 2k \\ ky + kz = -k \\ (k+1)x + ky + kz = k^2 \end{cases}$$
   b) Determinare esplicitamente le soluzioni del sistema dato (per tutti i valori di k per cui esso ha soluzione), utilizzando un metodo a piacere. (2.5 punti)

2. Determinare le soluzioni in campo complesso z_1, z_2, z_3 dell'equazione $z^3 + (4-3i)z - 13 - 9i = 0$, sapendo che $z_2 = iz_1$. (4 punti)
(**Suggerimento:** detta $P(z) = 0$ l'equazione da risolvere, calcolare $P(iz_1)$ e $P(iz_1) + iP(z_1)$; in questo modo è possibile ricavare un'equazione nell'incognita z_1 che è risolvibile più facilmente. . .)

3. È dato l'operatore lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla seguente matrice A_k (con $k \in \mathbb{R}$):
$$A_k = \begin{pmatrix} 3+k & 2k & k \\ 1-k & 9-3k & 6-2k \\ k-1 & 4k-12 & 3k-9 \end{pmatrix}.$$
   a) Discutere per quali valori del parametro reale k la matrice A_k è diagonalizzabile e/o triangolabile in campo reale. (4 punti)
   (**Suggerimento:** dopo aver scritto $(A_k - \lambda I)$, per calcolare il suo determinante sostituire alla seconda riga la somma fra la seconda e la terza riga, poi sostituire alla seconda colonna la differenza fra la seconda e la terza colonna, infine sviluppare secondo la seconda riga)
   b) Determinare, per ciascuno dei valori di k per i quali $\dim(\operatorname{Ker}(f_k)) > 0$, una base (a scelta fra tutte quelle possibili) di $\operatorname{Ker}(f_k)$. (2 punti)

4. Sia fissato nel piano proiettivo un sistema di coordinate omogenee (x', y', t'). Sia T una trasformazione proiettiva che associa ad un generico punto $P \equiv (x'_P,\ y'_P,\ t'_P,)$ il punto $T(P) = P' \equiv (x'_{P'},\ y'_{P'},\ t'_{P'},)$ tale che $\begin{cases} x'_{P'} = x'_P + t'_P \\ y'_{P'} = y'_P + t'_P \\ t'_{P'} = x'_P + y'_P \end{cases}$.
   a) Determinare i punti fissi di T. (2.5 punti)
   b) Determinare le equazioni della trasformazione T^{-1} (inversa di T). (1.5 punti)
   c) Data la conica γ di equazione $x'^2 + y'^2 - 2t'^2 = 0$, determinare la conica γ' trasformata di γ secondo T (1 punto).
   d) Scrivere l'equazione del fascio generato da γ e γ'. Determinare le due coniche degeneri di tale fascio e classificarle. Determinare i tre punti base del fascio. (3 punti)
   (**Suggerimento:** per la ricerca dei punti base mettere a sistema le coniche che generano il fascio (non le coniche degeneri) e sommare le eqazioni.
   e) Determinare l'equazione della parabola del fascio, l'equazione del suo asse e le coordinate del suo vertice. (2 punti)

5. Sono dati la parabola $\mathcal{P}$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} z = \dfrac{y^2}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ e il punto $V \equiv (3, 2, 2)$.
   a) Determinare l'equazione cartesiana del cono $\mathcal{C}$ avente vertice in V e direttrice $\mathcal{P}$. (3 punti)
   b) Mostrare che l'intersezione di $\mathcal{C}$ col piano $z = 0$ è un'iperbole e determinarne punti all'infinito, asintoti, centro di simmetria e assi di simmetria. (3 punti)

1		
2		
3		
4		
5		