Cognome
Nome
Matricola

Corso di laurea in Ing. Edile-Architettura
Compito scritto di Geometria – 20/02/2009

1. È dato l'operatore lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla seguente matrice A_k (con $k \in \mathbb{R}$):
$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ k & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   a) Determinare, al variare di k, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f_k))$ e $\dim(\mathrm{Im}\,(f_k))$, una base (a scelta fra tutte quelle possibili) di $\mathrm{Ker}\,(f_k)$ e una base di $\mathrm{Im}\,(f_k)$. (3 punti)
   b) Dire per quali valori di k il sistema $\begin{cases} kx_2 + 2x_3 = -k \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ kx_1 - 2x_3 = k \end{cases}$ ha soluzione, e determinarle esplicitamente utilizzando un metodo a piacere. (2 punti)
   c) Discutere per quali valori del parametro reale k la matrice A_k è diagonalizzabile e/o triangolabile in campo reale. (2.5 punti)
   d) Posto $k = -1$, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ a bandiera rispetto ad f_{-1}. (2.5 punti)
   Nota: Si ricorda che una base a bandiera $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è tale che $f(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = \beta\mathbf{v}_1 + \gamma\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3$, con α, β, γ scelti opportunamente. Nel caso in cui $s(\lambda) = 3, m(\lambda) = 1$, uno dei tre $\mathbf{v}$ scelti è un autovettore di f, gli altri due no.

2. a) Determinare le soluzioni in campo complesso dell'equazione $\mathrm{e}^{i\pi z^2} - \mathrm{e}^{2\pi z} = 0$ e rappresentarle nel piano di Gauss. (2 punti)
   b) Determinare le soluzioni in campo complesso della disequazione $|z^2 + \overline{z}| < |z^2 - \overline{z}|$ e indicare la regione delle soluzioni nel piano di Gauss. (2 punti)
   c) Determinare le soluzioni in campo complesso del sistema $\begin{cases} \mathrm{e}^{i\pi z^2} - \mathrm{e}^{2\pi z} = 0 \\ |z^2 + \overline{z}| < |z^2 - \overline{z}| \end{cases}$ ed indicarle nel piano di Gauss. (2 punti)

3. a) Determinare una (fra le infinite possibili) equazione del fascio di coniche passanti per i punti $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(1,3)$; Scrivere esplicitamente tutte le coniche degeneri di tale fascio e classificarle. (3 punti)
   b) Determinare le eventuali parabole e le eventuali circonferenze presenti nel fascio trovato al punto a). Determinare le coordinate del punto A (appartenente alla parabola) simmetrico di $O \equiv (0,0)$ rispetto all'asse della parabola e di M punto medio del segmento OA. Dalla conoscenza di M e della direzione dell'asse, ricavare l'equazione dell'asse della parabola. (3 punti)

4. Sono date le sfere $\mathcal{S}_1$ di equazione $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$ e $\mathcal{S}_2$ di equazione $(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.
   a) Mostrare che $\gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ è una circonferenza; determinarne piano su cui si trova, centro e raggio. (2.5 punti)
   b) Dato $P \equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \gamma$, mostrare che il piano tangente a $\mathcal{S}_1$ in P è ortogonale al piano tangente a $\mathcal{S}_2$ in P. Utilizzare il risultato precedente per determinare le equazioni parametriche della retta tangente a γ in P.(2.5 punti)
   c) Scrivere le equazioni del cilindro circolare $\mathcal{C}$ avente γ come direttrice. (2.5 punti)
   d) Mostrare che l'intersezione di $\mathcal{C}$ col piano $z = 0$ è un'ellisse. Determinarne centro di simmetria, equazioni degli assi e lunghezza dei semiassi. (2.5 punti)

1		
2		
3		
4		