| Cognome |
|---|
| Nome |
| Matricola |

# Corso di laurea in Ing. Edile-Architettura
# Compito scritto di Geometria – 15/09/2008

1. È dato l'operatore lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) dalla seguente matrice $A_k$ (con $k \in \mathbb{R}$):
$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Determinare, al variare di $k$, $\dim(\mathrm{Ker}(f_k))$ e $\dim(\mathrm{Im}(f_k))$, e le basi (a scelta fra tutte quelle possibili) di $\mathrm{Ker}(f_k)$ e $\mathrm{Im}(f_k)$. (3 punti)
   b) Dire se esistono dei valori di $k$ tali per cui $\mathrm{Ker}(f_k) \subset \mathrm{Im}(f_k)$, e in caso affermativo determinarli. (1.5 punti)
   c) Discutere per quali valori del parametro reale $k$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile e/o triangolabile in campo reale. (3.5 punti)
   d) Per un generico $k$ per cui $A_k$ è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f_k$. (3.5 punti)

2. a) Determinare le soluzioni in campo complesso dell'equazione $|z|^2 + iz^2 - 2\mathrm{Re}[(1+i)z] = 0$ e rappresentarle nel piano di Gauss. (1.5 punti)
   b) Determinare le soluzioni in campo complesso delle disequazioni $16\left(|z|^2 - 1\right) \leq 3\left(z + \overline{z}\right)^2 \leq 24i\left(z - \overline{z}\right) + 48$ e indicare la regione delle soluzioni nel piano di Gauss. (1.5 punti)
   c) Determinare le soluzioni in campo complesso del sistema $\begin{cases} |z|^2 + iz^2 - 2\mathrm{Re}[(1+i)z] = 0 \\ 16\left(|z|^2 - 1\right) \leq 3\left(z + \overline{z}\right)^2 \leq 24i\left(z - \overline{z}\right) + 48 \end{cases}$ e rappresentarle nel piano di Gauss. (1.5 punti)

3. È dato il fascio di coniche $x^2 + 2xy + y^2 - 2(1+2\alpha)x + 2(1-2\alpha)y + 4\alpha^2 = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Mostrare che in esso non vi sono coniche degeneri, e che il fascio è interamente formato da parabole, di cui si determini la comune direzione degli assi. (1.5 punti)
   b) Determinare le coordinate del vertice di ciascuna parabola al variare di $\alpha$, e l'equazione del luogo geometrico dei vertici. (2.5 punti)
   c) Calcolare la polare di un generico vertice rispetto alla "propria" parabola. Cosa si può dedurre dal risultato? (1.5 punti)
   d) Dopo aver scritto le equazioni della generica traslazione $T_\alpha$ che manda l'origine nel punto di coordinate $(\alpha,\ \alpha)$, mostrare che una generica parabola del fascio può essere ottenuta applicando $T_\alpha$ alla parabola del fascio corrispondente ad $\alpha = 0$. (2 punti)

4. Dato il piano $\pi$ di equazione $z = 0$ e la retta $r$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$
   a) Scrivere l'equazione del luogo geometrico $\mathcal{C}$ dei punti equidistanti da $\pi$ e da $r$ (2.5 punti)
   b) Mostrare che l'intersezione fra $\mathcal{C}$ e il piano $z = 4$ è un'ellisse. Determinarne coordinate del centro di simmetria, direzioni degli assi e lunghezza dei semiassi. (3 punti)

5. Data una retta e fissato su di essa un sistema di riferimento $OU$, determinare tutte le prospettività di tale retta in sé che hanno come uniche punti fissi l'origine $O$ e il punto all'infinito della retta data. (3 punti)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |