Compitino di algebra lineare del 1 giugno 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

(1) Definisci il polinomio minimo $m_A(x)$ di una matrice quadrata A a coefficienti complessi.
(2) Scrivi una matrice A di taglia 5×5 che abbia polinomio minimo $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.
(3) Scrivi due matrici A e A' come nel punto precedente, con lo stesso polinomio caratteristico, ma che non sono simili.

Esercizio 2. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^3$ definito da $g(x,y) = {}^t x S y$ dove S è la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considera al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) Determina la segnatura della restrizione $g|_W$ di g a W al variare di t.
(2) Per quali $t \in \mathbb{R}$ gli spazi W e $W^\perp$ sono in somma diretta?

Esercizio 3. Considera il piano π in $\mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione

$$\pi = \{x - 2y + 2z = 0\}$$

e la retta r descritta dalle equazioni

$$r = \begin{cases} x + 2y = 3, \\ x - z = 1 \end{cases}$$

(1) Scrivi r in forma parametrica.
(2) Determina se π e r sono paralleli o incidenti.
(3) Determina un piano π' che sia ortogonale a π e che contenga r.

Esercizio 4. Considera le due rette in $\mathbb{R}^3$ descritte in forma parametrica nel modo seguente:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Calcola la distanza fra r e s
(2) Determina la retta ortogonale ad entrambe.
(3) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(s) = r$.

Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Fatto a lezione.
(2) Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. La matrice associata a $g|_W$ nella base scelta è

$$\begin{pmatrix} 2t & t \\ t & -1 \end{pmatrix}.$$

La segnatura è

- $(1,1,0)$ per $t > 0$ oppure $t < -2$,
- $(0,2,0)$ per $t \in (0,2)$,
- $(0,1,1)$ per $t = 0$ oppure $t = -2$.

Gli spazi W e $W^\perp$ sono in somma diretta precisamente quando la restrizione è non degenere, quindi per tutti i valori $t \in \mathbb{R}$ tranne 0 e -2.

Esercizio 3. La retta r in forma parametrica è

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si verifica che interseca π per $t = \frac{1}{8}$. Quindi r e π sono incidenti. Per determinare π' scriviamo il fascio di piani che contengono r:

$$\big\{t(x + 2y - 3) + u(x - z - 1) = 0\big\} = \big\{(t + u)x + 2ty - uz - 3t - u = 0\big\}$$

Imponiamo che il piano del fascio abbia il vettore dei coefficienti ortogonale al vettore dei coefficienti di π e troviamo l'equazione

$$0 = t + u - 2t - 2u = -t - u$$

che è soddisfatta per $t = 1, u = -1$. Quindi

$$\pi' = \{2y + z - 2 = 0\}.$$

Esercizio 4. Facendo un disegno si vede facilmente che la retta ortogonale a entrambe è

$$r' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

La distanza fra le due rette è 2. Come isometria che sposa s in r possiamo prendere una rototraslazione di angolo $\frac{\pi}{2}$, asse r' e passo due, del tipo:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$