ABB COMPITINO DI ALGEBRA LINEARE DEL 26 FEBBRAIO 2018: PRIMA PARTE

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere ABB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia P il punto di coordinate $(1,1,2)$, Q il punto di coordinate $(1,2,1)$ e O l'origine. Sia α l'angolo POQ. Calcolare $\cos\alpha$.

Risposta: $\cos\alpha =$

Domanda 2. Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A)$.

Risposta: $\det(A) =$

Domanda 3. Sia $z = 3 + 2i$ e $w = 1 - i$. Calcolare la parte reale di z/w.

Risposta: $Re(z/w) =$

Domanda 4. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Descrivere W mediante una equazione lineare $ax + by + cz = 0$.

Risposta:

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare suriettiva, $W \subset \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 6 e $U = W \cap N(F)$. Sapendo che $N(F) + W = \mathbb{R}^8$ calcolare $\dim U$. [con $N(F)$ indico il nucleo di F]

Risposta: $\dim U =$

AAB Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: prima parte

Istruzioni: Avete 25 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere ABB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ______________________________

Domanda 1. Sia P il punto di coordinate $(1,1,2)$, Q il punto di coordinate $(1,-2,1)$ e O l'origine. Sia α l'angolo POQ. Calcolare $\cos\alpha$.

Risposta: $\cos\alpha =$

Domanda 2. Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A)$.

Risposta: $\det(A) =$

Domanda 3. Sia $z = 3-2i$ e $w = 1-i$. Calcolare la parte reale di z/w.

Risposta: $Re(z/w) =$

Domanda 4. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Descrivere W mediante una equazione lineare $ax+by+cz=0$.

Risposta:

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare suriettiva, $W \subset \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 7 e $U = W \cap N(F)$. Sapendo che $N(F) + W = \mathbb{R}^8$ calcolare $\dim U$. [con $N(F)$ indico il nucleo di F]

Risposta: $\dim U =$

AAA Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: prima parte

Istruzioni: Avete 35 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo i risultati senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati e le lettere ABB. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi alla seconda parte del compito è necessario aver risposto correttamente a tutte e 5 le domande.

Nome e cognome e matricola: ____________________

Domanda 1. Sia P il punto di coordinate $(1, 1, 2)$, Q il punto di coordinate $(-1, 2, 1)$ e O l'origine. Sia α l'angolo POQ. Calcolare $\cos\alpha$.

Risposta: $\cos\alpha =$

Domanda 2. Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\det(A)$.

Risposta: $\det(A) =$

Domanda 3. Sia $z = 2 + 3i$ e $w = 1 + i$. Calcolare la parte reale di z/w.

Risposta: $Re(z/w) =$

Domanda 4. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Descrivere W mediante una equazione lineare $ax + by + cz = 0$.

Risposta:

Domanda 5. Sia $F : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare suriettiva, $W \subset \mathbb{R}^8$ un sottospazio di dimensione 6 e $U = W \cap N(F)$. Sapendo che $N(F) + W = \mathbb{R}^8$ calcolare $\dim U$. [con $N(F)$ indico il nucleo di F]

Risposta: $\dim U =$

Compitino di algebra lineare del 26 febbraio 2018: seconda parte

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Mettete il vostro nome su tutti i fogli. Consegnate sia la bella che la brutta che il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Se un foglio che consegnate non volete che sia corretto scriveteci "brutta" in cima. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

a) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti.

b) Fare un esempio di tre vettori u, v, w in $\mathbb{R}^3$ tali che presi a coppie siano linearmente indipendenti (ovvero che u, v siano linearmente indipendenti. u, w siano linearmente indipendenti, e che v, w siano linearmente indipendenti) ma che u, v, w siano linearmente dipendenti

c) Siano u, v, w elementi di uno spazio vettoriale. Supponiamo che u e v siano linearmente indipendenti. Dimostrare che se u, v, w sono linearmente dipendenti allora $w \in \langle u, v \rangle$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcolare la dimensione di U e V.

b) Calcolare la dimensione di $U + V$ e $U \cap V$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia $W = \{f \in V \,:\, f(1) = 0\}$ e sia $D : W \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $D(f) = f'$. Per $a \in \mathbb{R}$ sia $F_a : V \longrightarrow V$ l'applicazione linerare tale che

$$F_a(f) = D(f) \qquad \text{per ogni } f \in W \quad \text{ e } \quad F_a(1) = a(t-1).$$

a) Scegliere una base per W e scrivere la matrice associata a D rispetto a questa base in partenza e alla base standard in arrivo;

b) Per quali valori di a l'applicazione F_a è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia A la seguente matrice 7×7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare rango, determinante e traccia di A;

b) Trovare un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^7$ tale che $A \cdot v = v$;

c) Determinare il polinomio caratteristico di A e dire se A è diagonalizzabile.

Soluzioni del compitino del 26 febbraio 2018, prima parte versione ABB

Domanda 1. 5/6.

Domanda 2. 4.

Domanda 3. 1/2.

Domanda 4. $3x + 2y + z = 0$.

Domanda 5. $\dim U = 1$.

Soluzioni del compitino del 26 febbraio 2018, prima parte versione AAB

Domanda 1. 1/6.

Domanda 2. 6.

Domanda 3. 5/2.

Domanda 4. $3x + 2y + z = 0$.

Domanda 5. $\dim U = 2$.

Soluzioni del compitino del 26 febbraio 2018, prima parte versione AAA

Domanda 1. 1/2.

Domanda 2. 5.

Domanda 3. 5/2.

Domanda 4. $3x + 2y + z = 0$.

Domanda 5. $\dim U = 1$.

Soluzioni del compitino del 26 febbraio 2018, seconda parte

Esercizio 1. a) n vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare nulla ha tutti i coefficienti nulli. Ovvero se $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ implica $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

b) Prendiamo $V = \mathbb{R}^2$ e $u = e_1, v = e_2, w = e_1 + e_2$.

c) Poiché u, v, w sono linearmente dipendenti esistono dei numeri a, b, c non tutti nulli tali che $au + bv + cw = 0$. Se fosse $c = 0$ ricaveremmo $au + bv = 0$ e poiché u e v sono linearmente indipendenti dedurremmo $a = b = 0$ contro l'ipotesi che a, b, c non sono tutti e tre nulli. Quindi possiamo assumere $c \neq 0$. Possiamo quindi dividere per c e ricavare

$$w = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v.$$

Quindi $w \in \langle u, v \rangle$.

Esercizio 2. a) U è generato da due vettori linearmente indipendenti quindi ha dimensione 2. Se riduciamo la terza equazione sparisce perché è tre volte la prima più due volte la seconda. Quindi V è definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

che è già a scalini, quindi ha due variabili libere e due variabili dipendenti, in particolare le soluzioni del sistema hanno dimensione 2. Quindi anche V ha dimensione 2.

b) Dalla formula di Grassmann abbiamo che

$$\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V = 4$$

quindi basta calcolare la dimensione della somma o dell'intersezione. In questo caso si poteva equivalentemente calcolare la somma o l'intersezione. Calcoliamo l'intersezione. L'intersezione è fatta dei vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Che risolvono il sistema che definisce V. Sostituendo troviao che le equazioni che definiscono V si riducono entrambe a $a + b = 0$. Quindi l'intersezione è fatta dei vettori in cui $a = -b$ ovvero dei vettori della forma

$$a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In particolare ha dimensione 1. Quindi $\dim(U \cap V) = 1$ e $\dim(U+V) = 3$.

Esercizio 3. a) $f_1 = t - 1$ e $f_2 = t^2 - 1$ è una base di W e $D(f_1) = 1$, $D(f_2) = 2t$ quindi

$$[D]^{f_1,f_2}_{1,t,t^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Per studiare la diagonalizzabilità di F_a scriviamo la matrice associata a F_a scegliendo una stessa base in partenza e in arrivo. Vista la definizione di F_a ci conviene scegliere la base $f_1, f_2, 1$. Abbiamo $F_a(f_1) = 1$, $F_a(f_2) = 2t = 2f_1 + 2$ e $F_a(1) = af_1$. Quindi

$$[F_a]^{f_1,f_2,1}_{f_1,f_2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di F_a è uguale a $\det(F_a - \lambda\,\mathrm{id})$ e sviluppando si ottiene $\lambda(\lambda^2 - a)$. Per $a < 0$ il polinomio non ha tutte le radici reali e quindi F_a non è diagonalizzabile, per $a > 0$ ha tre radici distinte e quindi è diagonalizzabile, per $a = 0$ vediamo che 0 è un autovalore con molteplicità algebrica 3 mentre la molteplicità geometrica di 0 è uno, quindi non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. a)Osserviamo che tutte le righe pari sono uguali tra loro e così pure le righe dispari, inoltre le prime due righe non sono una multipla dell'altra quindi la matrice ha rango 2 e determinante 0. La traccia inoltre è uguale alla somma degli elementi sulla diagonale ed e' quindi uguale a 1.

b) Osserviamo che $v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ha le proprietà richieste.

c) Il polinomio caratteristico è della forma $-t^7 + a_1 t^6 + a_2 t^5 + \cdots + a_7$.

Osserviamo che poiché il rango della matrice è 2, la molteplicità geometrica di 0, ovvero la dimensione del nucleo, è 5, e la molteplicità algebrica di 0 è maggiore o uguale a 5. Quindi t^5 divide il polinomio caratteristico, ovvero $a_3 = a_4 = \cdots = a_7 = 0$. Il polinomio caratteristico ha quindi la forma $-t^7 + at^6 + bt^5 = 0$. Dal punto b sappiamo che 1 è un autovalore quindi $-1 + a + b = 0$. Inoltre $a = Tr(A) = 1$. Quindi ricaviamo che il polinomio caratteristico è

$$t^6(1 - t)$$

quindi 0 ha molteplicità algebrica 6 e 1 ha molteplicità algebrica 1. Inoltre abbiamo già osservato che 0 ha molteplicità geometrica 5 e quindi la matrice non è diagonalizzabile.