Compito di Geometria e algebra lineare del 25 giugno 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V.

(1) Definisci il nucleo di f e mostra che è un sottospazio vettoriale di V.
(2) Se f è diagonalizzabile, è vero che $f^2 = f \circ f$ è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice A è diagonalizzabile?
(2) Calcola il polinomio minimo di A.
(3) Costruisci un'altra matrice B che non sia simile ad A, che non sia diagonalizzabile, ma che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A.

Esercizio 3. Considera il prodotto scalare g su $\mathbb{R}^4$ dato da

$$g(x, y) = {}^{\mathrm{t}}xSy$$

dove S è la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Determina il radicale di g e calcolane la dimensione.
(2) Dato $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, mostra che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^{\perp}$.
(3) Calcola la segnatura di $g|_W$.
(4) Calcola la segnatura di g.

Esercizio 4. Considera in $\mathbb{R}^3$ il piano

$$\pi = \{z = 1\}$$

e la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Determina la distanza fra π e r.
(2) Determina equazioni cartesiane per il piano π' contenente r e perpendicolare a π.
(3) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ che sposti il piano π in π'.

1. Soluzioni

Esercizio 1.

(1) Svolto a lezione.
(2) È vero. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di autovettori per f, è anche una base di autovettori per f^2. Infatti se $f(v_i) = \lambda_i(v_i)$ allora $f^2(v_i) = \lambda_i^2(v_i)$.

Esercizio 2. Il polinomio caratteristico è $(\lambda-3)^2(\lambda+1)^2$. Le molteplicità geometriche di entrambi gli autovalori -1 e 3 sono 1. Quiindi A non è diagonalizzabile. La forma di Jordan è necessariamente

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi il polinomio minimo è anch'esso $(\lambda-3)^2(\lambda+1)^2$. La matrice seguente soddisfa le richieste dell'ultimo punto:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Il radicale è $\ker S$, ed ha dimensione $4-2=2$ perché S ha rango 2. Concretamente:

$$\ker S = \{x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

La restrizione $g|_W$ nella base $\{e_1, e_2\}$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Questa ha segnatura $(2,0,0)$. Per quanto riguarda g, la sua segnatura è $(i_+, i_-, 2)$ e poiché $g|_W$ è definito positivo abbiamo $i_+ \geqslant 2$. Quindi la segnatura di g è $(2,0,2)$.

Esercizio 4. La retta r è ad altezza -1 e quindi la distanza da π è chiaramente 2. Per trovare π' basta aggiungere una direzione verticale a r e quindi

$$\pi' = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ -1+u \end{pmatrix} \;\middle|\; t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Come equazione cartesiana troviamo

$$\pi' = \{x - y = 2\}.$$

Per mandare π in π' cerchiamo innanzitutto un'isometria che mandi il vettore $(0,0,1)$ ortogonale a π nel vettore $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ortogonale a π'. Ad esempio prendiamo la matrice ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'isometria cercata è $f(x) = Ax + b$ per un opportuno $b \in \mathbb{R}^3$. Una isometria di questo tipo manda π in un piano parallelo a π', e per assicurarmi che lo mandi proprio in π' impongo ad esempio che $f(0,0,1) = (2,0,0)$, visto che $(0,0,1) \in \pi$ e $(2,0,0) \in \pi'$. In questo modo ottengo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . + \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$