ESERCIZI DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE (II PARTE)

versione: 24 maggio 2017

In ogni sezione gli esercizi sono tendenzialmente ordinati per difficoltà crescente.

1. Autovettori e autovalori

Esercizio 1.1. Trova gli autovalori in $\mathbb{C}$ e gli autovettori in $\mathbb{C}^2$ della matrice complessa $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1+i & i \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 1.2. La matrice seguente è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 \\ k-1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

$$\begin{pmatrix} k-2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 2-k \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.5. Data la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 23 & -84 \\ 6 & -22 \end{smallmatrix}\right)$, determinare A^{10}.

Esercizio 1.6. Considera la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e l'endomorfismo $T \colon M(2) \to M(2)$ definito come $T(X) = AX$.

- Scrivi la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $M(2)$.
- L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 1.7. Quali delle matrici seguenti sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

La risposta dipende dai parametri reali presenti nella matrice.

Esercizio 1.8. Sia $A \in M(2)$ una matrice fissata e considera l'endomorfismo $T \colon M(2) \to M(2)$ definito come $T(X) = AX$.

(1) Mostra che T è diagonalizzabile se e solo se A lo è.
(2) Scrivi una base di autovettori per T nel caso $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 1.9. Considera l'endomorfismo $T\colon M(2) \to M(2)$ definito usando la trasposta come $T(X) = {}^{t}X$.

- Scrivi la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $M(2)$.
- L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 1.10. Costruisci un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ senza autovettori. Più in generale, per ogni $n \geq 1$ costruisci un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2n}$ senza autovettori.

Esercizio 1.11. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo invertibile. Mostra che T è diagonalizzabile se e solo se T^{-1} è diagonalizzabile.

Esercizio 1.12. È sempre vero che la composizione di due endomorfismi diagonalizzabili è diagonalizzabile? Se sì, dimostralo. Se no, esibisci un controesempio.

Esercizio 1.13. Mostra che se $T\colon V \to V$ è diagonalizzabile allora $V = \ker T \oplus \mathrm{Im} T$.

Esercizio 1.14. Mostra che una matrice $M \in M(n)$ è diagonalizzabile se e solo se lo è la sua trasposta ${}^{t}M$.

Esercizio 1.15. Sia $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi di grado $\leq n$. Considera l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ dato da

$$T(p(x)) = (x+1)p'(x)$$

dove p' è la derivata di p. L'endomorfismo T è diagonalizzabile?

Esercizio 1.16. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo tale che $T \circ T = T$.

(1) Mostra che $V = \ker T \oplus \mathrm{Im} T$.
(2) Mostra che $V_0 = \ker T$ e $V_1 = \mathrm{Im} T$.
(3) Concludi che T è diagonalizzabile.

Esercizio 1.17. Sia $T\colon V \to V$ un endomorismo tale che $T \circ T = \mathrm{id}$.

(1) Mostra che $V = V_1 \oplus V_{-1}$. Il trucco è scrivere ogni vettore $v \in V$ come somma
$$v = \frac{v + T(v)}{2} + \frac{v - T(v)}{2}.$$
(2) Concludi che T è diagonalizzabile.

Esercizio 1.18. Sia $T\colon V \to V$ un endomorfismo tale che $T \circ T = 0$.

(1) Mostra che l'unico autovalore per T è 0.
(2) Mostra che T è diagonalizzabile se e solo se $T = 0$.

Esercizio 1.19. La matrice seguente è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? E su $\mathbb{C}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

I quattro esercizi che seguono sono un po' più difficili.

Esercizio 1.20. Considera una matrice a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Mostra che $\text{rk}M \geq \text{rk}A + \text{rk}C$. Costruisci degli esempi in cui vale l'uguaglianza e degli esempi in cui non vale.

Esercizio 1.21. Considera una matrice a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

in cui M, A e C sono matrici quadrate. Usando l'esercizio precedente, mostra che per ogni autovalore λ di M vale

$$m_g^M(\lambda) \leq m_g^A(\lambda) + m_g^B(\lambda)$$

dove indichiamo con $m_g^X(\lambda)$ la molteplicità geometrica di λ nella matrice X.

Esercizio 1.22. Deduci dall'esercizio precedente che se M è diagonalizzabile allora A e C sono entrambe diagonalizzabili. È vero l'opposto?

Esercizio 1.23. Sia $T: V \to V$ un endomorfismo e $W \subset V$ un *sottospazio invariante*, cioè un sottospazio tale che $T(W) \subset W$. Mostra che se T è diagonalizzabile allora anche la restrizione

$$T|_W : W \to W$$

è diagonalizzabile. Usa l'esercizio precedente.

2. Forma di Jordan e polinomio minimo

Esercizio 2.1. Trovare il polinomio minimo della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.2. Costruire due matrici complesse A e A' con lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso polinomio minimo, e le stesse molteplicità geometriche di tutti gli autovalori.

Esercizio 2.3. Trova due matrici $A, B \in M(2)$ che abbiano lo stesso polinomio caratteristico ma polinomi minimi diversi.

Esercizio 2.4. Determina le forme di Jordan delle matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ -9 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.5. Elenca tutte le forme di Jordan che hanno polinomio caratteristico $(\lambda-1)^2(\lambda+2)^3$. Tra queste, determina quella che ha polinomio minimo $(\lambda-1)(\lambda+2)^2$.

Esercizio 2.6. Sia $V = \mathbb{C}_n[x]$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq n$. Mostra che l'applicazione $f\colon V \to V$ che manda un polinomio $p(x)$ nella sua derivata $p'(x)$ è nilpotente di ordine $n+1$. Determina la sua forma di Jordan.

Esercizio 2.7. Mostra che le matrici $n \times n$ nilpotenti di indice di nilpotenza n sono tutte simili fra loro.

Esercizio 2.8. Determina tutte le forme di Jordan 4×4 con un solo autovalore λ_0 e per ciascuna scrivi il suo polinomio minimo. (Risposta: sono 5.)

Esercizio 2.9. Sia A una matrice 7×7 tale che $(A-I)^3 = 0$ e $\mathrm{rk}(A-I)^2 = 2$. Qual è la forma di Jordan di A?

Esercizio 2.10. Determinare tutte le matrici complesse 2×2 nilpotenti.

Esercizio 2.11. Sia A una matrice complessa quadrata tale che $A^n = I$ per qualche numero intero $n \geq 1$. Mostra che A è sempre diagonalizzabile e determina quali possono essere i suoi autovalori.

Esercizio 2.12. Sia A una matrice complessa tale che $A^2-2A+I = 0$. Mostra che A è diagonalizzabile se e solo se $A = I$.

3. Prodotti scalari

Esercizio 3.1. Sia $g(x, y) = {}^t x S y$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito da $S = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Scrivi la matrice associata a g nella base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Verifica che la matrice che ottieni è congruente a S. Determina i *vettori isotropi*, cioè i vettori v tali che $g(v, v) = 0$.

Esercizio 3.2. Sia $V = M(n)$ lo spazio vettoriale delle matrici $n\times n$. Considera le funzioni

$$f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(A, B) = \mathrm{tr}(AB),$$
$$g\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(A, B) = \mathrm{tr}({}^t A B).$$

(1) Mostra che f e g sono prodotti scalari.
(2) Mostra che g è definito positivo.
(3) Il prodotto scalare f è definito positivo?

Prova a rispondere a queste domande nel caso $n = 2$. È anche un utile esercizio scrivere le matrici dei prodotti scalari rispetto alla base canonica di $M(2)$.

Esercizio 3.3. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Scrivi la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica. Determina il radicale di questo prodotto scalare.

Esercizio 3.4. Sia g un prodotto scalare su V. Mostra che:

(1) se tutti i vettori sono isotropi, allora il prodotto scalare è banale, cioè $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $v, w \in V$;
(2) se g è *indefinito*, cioè esistono v e w con $g(v, v) > 0$ e $g(w, w) < 0$, allora esiste un vettore isotropo non banale.

Esercizio 3.5. Siano D_1 e D_2 due matrici diagonali, entrambe aventi i termini sulla diagonale tutti strettamente positivi. Mostra che le due matrici D_1 e D_2 sono congruenti.

Esercizio 3.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.

- Mostra che per ogni $v \in V$ non nullo esiste un prodotto scalare g definito positivo su V tale che $g(v, v) = 1$.
- Mostra che per ogni coppia $v, w \in V$ di vettori indipendenti esiste un prodotto scalare g definito positivo su V tale che $g(v, w) = 0$.

Esercizio 3.7. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$$

dove p' e p'' sono i polinomi ottenuti come derivata prima e seconda di p. Considera l'insieme $W \subset \mathbb{R}_2[x]$ formato da tutti i polinomi $p(x)$ che si annullano in $x = 1$, cioè tali che $p(1) = 0$.

- Mostra che W è un sottospazio vettoriale e calcola la sua dimensione.
- Determina il sottospazio ortogonale $W^\perp$.

Esercizio 3.8. Considera su $M(2)$ il prodotto scalare $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ già esaminato in un esercizio precedente.

- Se $W \subset M(2)$ è un sottospazio vettoriale, è sempre vero che $M(2) = W \oplus W^\perp$?
- Calcola $\dim W$ e determina $W^\perp$ nei casi seguenti:
  (1) W è il sottospazio formato dalle matrici simmetriche.
  (2) W è il sottospazio formato dalle matrici diagonali.

Esercizio 3.9. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) - p(1)q(1).$$

(1) Determina il radicale del prodotto scalare.
(2) Determina un polinomio isotropo che non sia contenuto nel radicale.
(3) I vettori isotropi formano un sottospazio vettoriale?

Esercizio 3.10. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato da

$$\langle x, x'\rangle = {}^{t}xSx'$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Il prodotto scalare è degenere?
(2) Esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 tale che $V \subset V^\perp$?
(3) Determinare i vettori isotropi. Formano un sottospazio vettoriale?
(4) Determinare un piano vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la restrizione del prodotto scalare a W sia definita positiva.
(5) Determinare un piano vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la restrizione del prodotto scalare a W sia degenere.

Esercizio 3.11. Sia V spazio vettoriale di dimensione n, dotato di un prodotto scalare g. Siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali qualsiasi. Mostra i fatti seguenti:

(1) Se $U \subset W$, allora $W^\perp \subset U^\perp$.
(2) $U \subset (U^\perp)^\perp$. Se g è non degenere, allora $U = (U^\perp)^\perp$.

Esercizio 3.12. Considera $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo. Siano $U, W \subset \mathbb{R}^3$ due piani vettoriali distinti. Mostra che

(1) $U \cap W$, $U^\perp$ e $W^\perp$ sono tre rette vettoriali.
(2) Vale $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
(3) Esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$v_1 \in (U \cap W), \qquad v_2 \in U^\perp, \qquad v_3 \in W^\perp.$$

(4) Determina i vettori v_1, v_2, v_3 nel caso seguente:

$$U = \{x + y = 0\}, \qquad W = \{x + z = 0\}.$$

Dimostra questi fatti in modo algebrico, ma visualizza il problema con un disegno (approssimativo).

Esercizio 3.13. Trova una base ortogonale per i prodotti scalari seguenti su $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.14. Determina la segnatura delle matrici seguenti, al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.15. Considera il prodotto scalare definito positivo su $M(n)$ dato da $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$. Scrivi una base ortonormale per questo prodotto scalare.

Esercizio 3.16. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}_3[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1).$$

- Determina la segnatura.
- Determina il radicale.
- Determina $W^\perp$ dove $W = \mathrm{Span}(x + x^2)$.

Esercizio 3.17. Determina quali fra queste matrici sono congruenti:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{17} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.18. Calcola la segnatura delle seguenti matrici al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+1 & \alpha+2 \\ \alpha+1 & \alpha+2 & \alpha+1 \\ \alpha+2 & \alpha+1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.19. Considera il prodotto scalare su $M(2)$ dato da

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB).$$

Mostra che è un prodotto scalare e calcolane la segnatura.

Esercizio 3.20. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre

$$W = \{2x + y = z\}.$$

(1) Calcola la segnatura di S.
(2) Determina una base per $W^\perp$.

Esercizio 3.21. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ dato dalla matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sia inoltre

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(1) Calcola la segnatura di S.
(2) Determina una base per $W^\perp$.

Esercizio 3.22. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo. Dimostra la *legge del parallelogramma*: per ogni $v, w \in V$ vale l'uguaglianza

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big).$$

Esercizio 3.23. Considera i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Mostra che formano una base e ortogonalizzala con Gram–Schmidt.
(2) Calcola le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in questa base.

Esercizio 3.24. Considera il prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Costruisci una base ortogonale che contenga il vettore $x + x^2$.

Esercizio 3.25. Considera $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo. Determina una base ortonormale per ciascuno dei sottospazi seguenti:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$W = \{x + y + z = 0\}.$$

Determina infine una base ortonormale v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ con queste proprietà:

$$v_1 \in U \cap W, \quad v_2 \in U, \quad v_3 \in W.$$

Quante sono le basi possibili di questo tipo?

Esercizio 3.26. Considera $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare Euclideo. Determina una base ortonormale del sottospazio

$$W = \{w - x + y + z = 0\}.$$

Completa questa base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3.27. Considera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina una base ortonormale per questo prodotto scalare.

Esercizio 3.28. Considera il piano

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^4.$$

- Determina il piano ortogonale $U^\perp$.
- Trova una base ortogonale per U ed una base ortogonale per $U^\perp$.
- Nota che l'unione di queste due basi è una base $\mathcal{B}$ ortogonale per $\mathbb{R}^4$. Scrivi le coordinate dei vettori della base canonica e_1 e e_3 rispetto a questa base.

Esercizio 3.29. Determina un prodotto scalare g su $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale i vettori $\binom{0}{1}$ e $\binom{1}{1}$ formano una base ortonormale. Scrivi la matrice associata a g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Negli esercizi seguenti, quando non è specificato diversamente, il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è sempre quello euclideo.

Esercizio 3.30. Considera il piano $U = \{x+y+z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e scrivi la matrice associata alla proiezione ortogonale p_U su U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.31. Considera il piano $U = \{x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Trova una base ortonormale per U e completala a base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.32. Considera il piano $U = \{4x - 3y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e indica con p e q le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente su U e $U^\perp$. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivi la matrice associata a p rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) L'endomorfismo $f(x) = p(x) - q(x)$ è diagonalizzabile?

(3) Determina il sottospazio ortogonale a U rispetto al prodotto scalare $\langle x, y\rangle = {}^t x A y$.

Esercizio 3.33. Siano $U, U' \subset \mathbb{R}^3$ due piani distinti. Considera la composizione $f = p_{U'} \circ p_U$ delle proiezioni ortogonali su U e U'. Mostra che f ha un autovalore 0, un autovalore 1, e un terzo autovalore $\lambda \in [0, 1]$.

Suggerimento: Disegna i due piani e determina geometricamente tre autovettori indipendenti per f. □

Esercizio 3.34. Trova assi e angoli di rotazione delle seguenti isometrie di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.35. Scrivi una matrice $A \in M(3)$ che rappresenti una rotazione intorno all'asse

$$r = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

di angolo $\frac{2\pi}{3}$.

Esercizio 3.36. Se $\mathrm{Rif}_U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la riflessione lungo un piano $U \subset \mathbb{R}^3$, che tipo di isometria è $-\mathrm{Rif}_U$?

Esercizio 3.37. Mostra che esistono esattamente 48 matrici ortogonali $A \in M(3)$ i cui coefficienti A_{ij} siano tutti numeri interi. Quante di queste preservano l'orientazione di $\mathbb{R}^3$? Quali sono i loro assi? L'insieme

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1 \leqslant x, y, z \leqslant +1 \right\}$$

è un cubo centrato nell'origine. Verifica che le 48 matrici ortogonali A così ottenute sono tutte simmetrie del cubo, cioè $L_A(C) = C$.

Esercizio 3.38. Scrivi una matrice $A \in M(3)$ che rappresenti una riflessione rispetto a:

(1) il piano $U = \{x - y + 3z = 0\}$;
(2) la retta $U = \operatorname{Span}(e_1 + e_3)$;
(3) l'origine $U = \{0\}$.

Esercizio 3.39. Scrivi una isometria di $\mathbb{R}^4$ che non ha autovettori. Mostra che in $\mathbb{R}^{2n}$ esistono sempre isometrie senza autovettori.

Esercizio 3.40. Sia $R \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotazione di un angolo θ lungo un asse r. Sia $P \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su un piano U che contiene r. Per quali valori di θ l'endomorfismo $P \circ R$ è diagonalizzabile?

4. Spazio euclideo

Esercizio 4.1 (Prodotto triplo)**.** Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Mostra che

$$\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle = \det(v_1|v_2|v_3).$$

Se v_1, v_2, v_3 sono indipendenti, questo è il volume del parallelepipedo con tre lati v_1, v_2, v_3.

Esercizio 4.2. Sia $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometria. Mostra che se $\det T = 1$ allora T preserva il prodotto vettoriale, cioè

$$T(u) \times T(v) = T(u \times v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Cosa succede se $\det T = -1$?

Esercizio 4.3. Sia $u \in \mathbb{R}^3$ unitario e w un vettore ortogonale a u. Mostra che

$$u \times (u \times w) = -w.$$

Esercizio 4.4. Considera le rette affini

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dimostra che sono sghembe e che esiste un'unica retta affine t perpendicolare ad entrambe. Determina t.

Esercizio 4.5. Considera i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Trova delle equazioni parametriche per la retta r passante per P e Q.
(2) Trova delle equazioni cartesiane per il piano π ortogonale a r e passante per R.
(3) Trova delle equazioni cartesiane per il piano ortogonale a π, contenente r, e parallelo alla retta passante per R e S.

Esercizio 4.6. Considera le rette

$$r = \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + z = 1, \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x + z = 1, \\ y - z = -2. \end{cases}$$

(1) Determina se sono incidenti, parallele o sghembe. Calcola la loro distanza e trova tutte le rette perpendicolari a entrambe.
(2) Determina i piani contenenti r che sono paralleli a s.

Esercizio 4.7. Siano P e Q due punti distinti di $\mathbb{R}^3$. Mostra che il luogo dei punti equidistanti da P e Q è un piano π.

Esercizio 4.8. Siano r e r' due rette sghembe in $\mathbb{R}^3$ e P un punto disgiunto da r e r', tale che il piano π passante per P e r non sia parallelo a r', ed il piano π' passante per P e r' non sia parallelo ad r. Mostra che esiste un'unica retta s passante per P che interseca r e r'.

Suggerimento. Considera l'intersezione fra π e r'. □

Esercizio 4.9. Nell'esercizio precedente, determina esplicitamente s nel caso seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \left\{ \frac{x_1+3}{2} = 1 - x_2 = -2x_3 \right\}, \quad r' = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Esercizio 4.10. Considera il piano affine $\pi = \{x + y - z = 2\}$ in $\mathbb{R}^3$. Scrivi l'affinità $f(x) = Ax + b$ che rappresenta una riflessione rispetto a π.

Esercizio 4.11. Scrivi l'affinità $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^2$ che rappresenta una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno al punto $P = \binom{3}{1}$.

Esercizio 4.12. Scrivi l'affinità $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ che rappresenta una rotazione di angolo $\frac{2\pi}{3}$ intorno all'asse r seguente:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4.13. Siano f e g due rotazioni del piano $\mathbb{R}^2$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno a due punti P e Q. Mostra che la composizione $f \circ g$ è una riflessione rispetto ad un qualche punto R.

Esercizio 4.14. Siano f e g due riflessioni di $\mathbb{R}^2$ intorno a due rette affini r e s. Mostra che:

- se r e s sono parallele, la composizione $f \circ g$ è una traslazione;
- se r e s sono incidenti, la composizione $f \circ g$ è una rotazione.

Esercizio 4.15. Scrivi un'affinità $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_3$, $f(r_3) = r_1$ dove r_1, r_2, r_3 sono le rette

$$r_1 = \{y = 1\}, \qquad r_2 = \{x = 1\}, \qquad r_3 = \{x + y = -1\}.$$

Esercizio 4.16. Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^2$ senza punti fissi, tale che $f(r) = r'$ dove r e r' sono le rette

$$r = \{y = x\}, \qquad r' = \{y = -x\}.$$

Esercizio 4.17. Scrivi una rototraslazione $f(x) = Ax + b$ in $\mathbb{R}^3$ che abbia asse

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

tale che

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.18. Considera i piani affini $\pi_1 = \{x = 0\}$ e $\pi_2 = \{y = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$. Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ di $\mathbb{R}^3$ senza punti fissi tale che $f(\pi_1) = \pi_2$.

Esercizio 4.19. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rototraslazione con asse r. Mostra che i punti che si spostano di meno sono proprio quelli di r, cioè se $P \in r$ e $Q \notin r$ allora

$$d(P, f(P)) < d(Q, f(Q)).$$

5. Teorema spettrale

Esercizio 5.1. Verifica che le matrici seguenti hanno una base ortonormale di autovettori se e solo se sono simmetriche:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.2. Determina una base ortonormale di autovettori (rispetto al prodotto hermitiano euclideo di $\mathbb{C}^2$) per l'endomorfismo autoaggiunto definito dalla matrice hermitiana

$$\begin{pmatrix}1 & i\\-i & 1\end{pmatrix}.$$

Nei tre esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare definito positivo.

Esercizio 5.3. Sia $U \subset V$ un sottospazio qualsiasi. Mostra che la proiezione p_U su U e la riflessione Rif_U lungo U sono entrambi endomorfismi autoaggiunti di V.

Esercizio 5.4. Sia $T: V \to V$ endomorfismo. Supponiamo che T sia contemporaneamente un endomorfismo autoaggiunto e una isometria. Mostra che T è una riflessione ortogonale lungo un sottospazio $U \subset V$. Chi è U?

Esercizio 5.5. Sia $T: V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Mostra che se $T^2 = T$ allora T è la proiezione ortogonale lungo un sottospazio $U \subset V$. Chi è U?

Esercizio 5.6. Sia A una matrice quadrata reale diagonalizzabile, con tutti gli autovalori positivi. Mostra che esiste una radice quadrata B di A, cioè esiste una matrice quadrata B tale che $A = B^2$.

Se A è simmetrica, mostra che puoi chiedere che B sia simmetrica.

Esercizio 5.7. Mostra che $-I_n$ ha una radice quadrata se e solo se n è pari.

Esercizio 5.8. Siano g e h due prodotti scalari sullo stesso spazio vettoriale reale V. Sia g definito positivo. Mostra che esiste una base che sia simultaneamente ortogonale per entrambi i prodotti scalari.

6. Spazio proiettivo

Esercizio 6.1. Scrivi l'equazione omogenea che descrive la retta in $\mathbb{P}^2$ che passa per i punti

$$[1,1,0], \qquad [0,0,1].$$

Esercizio 6.2. Scrivi l'equazione omogenea che descrive il piano proiettivo $\pi \subset \mathbb{P}^3$ che passa per i punti

$$[1,1,0,0], \qquad [0,0,1,0], \qquad [0,0,1,1].$$

Scrivi in forma parametrica la retta $r = \pi \cap \pi'$, intersezione dei piani proiettivi π e $\pi' = \{x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$. Determina l'equazione omogenea che descrive il piano che passa per r e il punto $[0,1,-1,-1]$.