SISTEMI LINEARI E MATRICI

1° SISTEMI LINEARI E MATRICI

IN QUESTE NOTE FAREMO ALCUNE OSSERVAZIONI SU SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI COME PER ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

VOGLIAMO CAPIRE .

- QUANDO IL SISTEMA HA SOLUZIONE
- COME DESCRIVERE LE SOLUZIONI E IN PARTICOLARE CAPIRE QUANTE SONO

NEL CASO GENERALE LE EQUAZIONI POSSONO ESSERE m INVECE DI 3, E LE INCOGNITE POSSONO ESSERE n INVECE DI 3. LA FORMA GENERALE DI UN SISTEMA DI QUESTO TIPO NELLE VARIABILI $x_1 \dots x_n$ È

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

DOVE LE a_{ij} E LE b_i SONO COSTANTI FISSATE.

Se pongo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ e

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ IL SISTEMA SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA

$$A x = b$$

LA MATRICE $m \times n$ A SI DICE LA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA E LA MATRICE $m \times (n+1)$ $(A \ b)$ SI DICE LA MATRICE COMPLETA ASSOCIATA AL SISTEMA.

NEL CASO DEL SISTEMA INIZIALE PER ESEMPIO ABBIAMO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

E LA MATRICE COMPLETA È $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

② IL CASO DELLE MATRICI INVERTIBILI

SIA A UNA MATRICE $n \times n$ CHE HA SIA UNA INVERSA DESTRA CHE SINISTRA, IN TAL CASO ABBIAMO VISTO L'INVERSA DESTRA E SINISTRA COINCIDONO. INOLTRE L'INVERSA È UNICA E SI INDICA CON A^{-1},

ALLORA IL SISTEMA

$$A x = b$$

HA COME UNICA SOLUZIONE $x = A^{-1} b$

dim

devo dimostrare

1) che $x = A^{-1} b$ è soluzione

in fatti: $A \cdot (A^{-1} b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b$

$$= I_n \cdot b$$

$$= b$$

2) che non ci sono altre soluzioni

infatti se $A y = b$ allora

$$A^{-1}(A y) = A^{-1} b$$

e $y = A^{-1} \cdot (A \cdot y) = A^{-1} b = x$

#

Esercizio

1) Se A ha una inv. destra il sistema ha sempre soluzione

2) Se A ha una inv. sinistra il sistema ha al più una soluzione.

③ SISTEMI EQUIVALENTI E TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

DUE SISTEMI $Ax = b$ e $A'x = b'$ SI DICONO <u>EQUIVALENTI</u> SE HANNO LE STESSE SOLUZIONI.

CI SONO TRE OPERAZIONI CHE TRASFORMANO UN SISTEMA IN UNO EQUIVALENTE

R_{ij} : SCAMBIARE LA RIGA i-ESIMA CON LA j-ESIMA

$R_i(\alpha)$: MOLTIPLICARE LA RIGA i-ESIMA PER UN NUMERO α <u>DIVERSO DA ZERO</u>

$R_{ij}(\alpha)$: SOMMARE ALLA RIGA i-ESIMA LA j-ESIMA MOLTIPLICATA PER α.
α È QUALSIASI MA <u>DEVE ESSERE $j \neq i$</u>.

È CHIARO CHE SE x È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA ORIGINALE ALLORA LO È ANCHE DEL SISTEMA TRASFORMATO. INOLTRE POSSIAMO TORNARE AL SISTEMA ORIGINALE APPLICANDO LE STESSE TRASFORMAZIONI, INFATTI:

- SE APPLICO DUE VOLTE L'OPERAZIONE R_{ij} TORNO AL SISTEMA INIZIALE
- SE APPLICO $R_i(\alpha)$ E POI $R_i(\alpha^{-1})$ TORNO AL SISTEMA INIZIALE
- SE APPLICO $R_{ij}(\alpha)$ E POI $R_{ij}(-\alpha)$ TORNO AL SISTEMA INIZIALE

QUINDI È ANCHE VERO CHE SE x È UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA TRASFORMATO LO È ANCHE DEL SISTEMA ORIGINALE

(5) MATRICI ELEMENTARI

Sia M_{ij} la matrice

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & & 1 & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

TUTTE LE ALTRE ENTRATE SONO 0.

$$
M_i(\alpha) \qquad
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & 0 & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & 0 & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

TUTTE LE ALTRE ENTRATE SONO 0.

$$
M_{ij}(\alpha) \qquad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\
\begin{array}{c} i \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & \alpha & \\
 & \ddots & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

TUTTE LE ALTRE ENTRATE SONO 0.

ESERCIZIO

1) $M_{ij} \cdot M_{ij} = I$
2) $M_i(\alpha)\, M_i(\alpha^{-1}) = I \qquad \alpha \neq 0$
3) $M_{ij}(\alpha)\, M_{ij}(-\alpha) = I \qquad i \neq j$

Si noti che

- L'OPERAZIONE R_{ij} CORRISPONDE A MOLTIPLICARE A SINISTRA PER M_{ij}
- L'OPERAZIONE $R_i(\alpha)$ CORRISPONDE A MOLTIPLICARE A SINISTRA PER $M_i(\alpha)$
- L'OPERAZIONE $R_{ij}(\alpha)$ CORRISPONDE A MOLTIPLICARE A SINISTRA PER $M_{ij}(\alpha)$

5 MATRICI A SCALINI E A SCALINI IN FORMA FORTE

UNA MATRICE SI DICE A SCALINI SE LA PRIMA ENTRATA DIVERSA DA ZERO NELLA RIGA $i+1$-ESIMA È PIÙ A DESTRA DELLA PRIMA ENTRATA DIVERSA ZERO NELLA RIGA i-ESIMA. IN TAL CASO LE PRIME ENTRATE DIVERSE DA ZERO SI DICONO PIVOT

Esempio Matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{} = \text{PIVOT}$$

Esempio Matrice non a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IL NUMERO DELLE RIGHE DIVERSE DA ZERO DI UNA MATRICE A SCALINI SI DICE IL RANGO DELLA MATRICE

UNA MATRICE A SCALINI SI DICE **A SCALINI IN FORMA FORTE** SE TUTTI I PIVOT SONO UGUALI A 1 E SE LE ENTRATE SOPRA I PIVOT SONO TUTTE UGUALI A ZERO.

Esempio matrice a scalini in forma forte.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SE LA MATRICE X È A SCALINI È FACILE RIDURLA IN FORMA FORTE USANDO $R_i(\alpha)$ e $R_{ij}(\alpha)$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\left(1/4\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\left(1/2\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_{23}\left(-1/4\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{13}\left(-\frac{5}{2}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{12}\left(-\frac{3}{2}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 & 5/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

= INDICO L'ENTRATE CHE "NON MI PIACE"

= INDICO L'ENTRATA CHE HO "SISTEMATO" CON LA TRASFORMAZIONE

SI NOTI CHE LE POSIZIONI DEI PIVOT NON SONO CAMBIATE

(6) SISTEMI ASSOCIATI A MATRICI A SCALINI

SE UN SISTEMA È ASSOCIATO AD UNA MATRICE A SCALINI ALLORA È PARTICOLARMENTE SEMPLICE DIRE SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE

INOLTRE SE IL SISTEMA È ASSOCIATO AD UNA MATRICE A SCALINI IN FORMA FORTE È ANCHE PARTICOLARMENTE SEMPLICE SCRIVERE ESPLICITAMENTE LE SOLUZIONI

SIA $X = (A \;\; b)$ LA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA E SUPPONIAMO CHE SIA A SCALINI, LE VARIABILI CORRISPONDENTI AI PIVOT DI A LE CHIAMO VARIABILI DIPENDENTI E LE ALTRE LE CHIAMO VARIABILI LIBERE.

TEOREMA (ROUCHÉ - CAPELLI)

SIA $A \in Mat_{m \times n}$, $b \in K^m$ e $X = (A, b)$.

SE X È A SCALINI

1) IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE $\text{RANGO}(X) = \text{RANGO}(A) = d$

2) SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE ALLORA CI SONO d VARIABILI DIP. CHE INDICO CON $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$ e $n-d$ INDIP. CHE INDICO CON $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$.

ESISTE UNA MATRICE C $d \times (n-d)$ e UN VETTORE $f \in K^d$ TALE CHE LE SOLUZIONI SONO LE y, z TALI CHE

$$y = f + Cz$$

ILLUSTRIAMO LA DIM. DEL TEOREMA CON UN ESEMPIO. FACCIAMO IL CASO DI UNA MATRICE A A SCALINI IN FORMA FORTE.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

= PIVOT

LE VARIABILI LIBERE SONO $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$

LE VARIABILI DIP. SONO $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}$

IL SISTEMA ASSOCIATO A $(A\ b)$ È

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_5 = b_1 \\ x_4 + 4x_5 = b_2 \\ x_6 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE NELLA FORMA

$$\begin{cases} x_2 = b_1 - 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = b_2 - 4x_5 \\ x_6 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

ORA IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE $b_4 = 0$ OVVERO $\text{Rango}(X) = \text{Rango}(A)$.

E SE $b_4 = 0$ LE SOLUZIONI SONO LE

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \text{ TALI CHE } \underset{\substack{\parallel \\ y}}{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\parallel \\ f}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}} + \underset{\substack{\parallel \\ C}}{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\parallel \\ z}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}}$$

LE CONCLUSIONI RIMANGONO INALTERATE QUANDO PARTIAMO DA UN SISTEMA A SCALINI: PRIMA RIDUCIAMO IL SISTEMA A SCALINI IN FORMA FORTE COME ILLUSTRATO PRIMA (QUESTO NON CAMBIA IL NUMERO DI RIGHE DIVERSO DA ZERO E LA POSIZIONE DEI PIVOT), QUINDI CONCLUDIAMO COME SOPRA.

7 RIDUZIONE DI UNA MATRICE QUALSIASI A SCALINI

OGNI MATRICE PUÒ ESSERE TRASFORMATA IN UNA MATRICE A SCALINI

SI PROCEDE PER COLONNE: PRIMA SI SISTEMANO LE ENTRATE DELLA PRIMA COLONNA, POI DELLA 2^a ETC.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}$$

- LA PRIMA COLONNA È A POSTO
- LA SECONDA COLONNA NON È A POSTO PERCHÉ L'ENTRATA VIOLA LA REGOLA CHE LE PRIME ENTRATE DIVERSE DA ZERO SONO SEMPRE PIÙ A DESTRA SCENDENDO
- SISTEMO QUESTO PROBLEMA SCAMBIANDO LE PRIME DUE RIGHE.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{R_{31}(-2)}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{R_{42}(-1)}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{R_{43}(-\frac{1}{4})} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

= ENTRATE CHE NON MI "PIACCIONO" E CHE VOGLIO SISTEMARE.

= PIVOT

8 SOLUZIONE DI UN SISTEMA QUALSIASI

CIÒ CHE ABBIAMO SPIEGATO NEI PUNTI 6 E 7 FORNISCE UN SISTEMA PER RISOLVERE UN SISTEMA QUALSIASI:

- SI PARTE DAL SISTEMA $Ax = b$
- SI RIDUCE LA MATRICE $(A\ b)$ A SCALINI
- SI CONCLUDE COME NEL PUNTO 6

VORREMMO FARE QUALCOSA DI PIÙ: VORREMMO DEFINIRE IL RANGO DI UNA MATRICE NON SOLO NEL CASO DI MATRICI A SCALINI E VORREMMO DARE UN SIGNIFICATO AL NUMERO DI VARIABILI LIBERE.

UNA POSSIBILE DEFINIZIONE È LA SEGUENTE

PRENDI UNA MATRICE X E RIDUCILA A SCALINI OTTENENDO Y. DEFINIAMO RANGO (X) = RANGO (Y).

TUTTAVIA UNA MATRICE SI PUÒ RIDURRE A SCALINI IN TANTI MODI DIVERSI, E DOVREMMO DIMOSTRARE CHE SI OTTIENE SEMPRE LO STESSO NUMERO.

NOI SEGUIREMO UN'ALTRA STRADA INTRODUCENDO IL CONCETTO DI DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE