

## ALCUNE OSSERVAZIONI GEOMETRICHE SUI NUMERI COMPLESSI

ABBIAMO UTILIZZATO I NUMERI COMPLESSI PER DESCRIVERE ALCUNE QUANTITÀ GEOMETRICHE.

### ① ANGOLI, PRODOTTO SCALARE E AREA DI UN TRIANGOLO

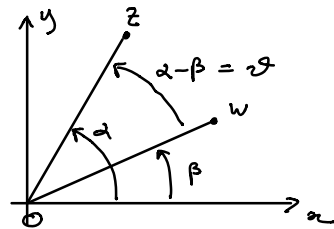
SIANO  $w, z \in \mathbb{C}$ . CONSIDERIAMO IL PRODOTTO  $z\bar{w}$ .

SE  $z = \rho e^{i\alpha}$  e  $w = R e^{i\beta}$  con  $\rho, R, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\rho, R \geq 0$  ABBIAMO

$$z\bar{w} = \rho R e^{i(\alpha-\beta)}$$

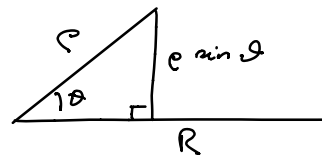
SE INDICO CON  $\vartheta = \alpha - \beta$  L'ANGOLO, CON SEGNO,  $\widehat{z\bar{w}}$ , ABBIAMO

$$z\bar{w} = \rho R \cos \vartheta + i \rho R \sin \vartheta$$



NOTIAMO CHE LA PARTE IMMAGINARIA DI QUESTA ESPRESSIONE:

$$\rho R \sin \vartheta$$



È UGUALE, A SEGNO DEL SEGNO, A DUE VOLTE L'AREA DEL TRIANGOLO  $z\bar{w}$ . INFATTI LA BASE  $OW$  È LUNGA  $R$  E L'ALTEZZA  $|\rho \sin \vartheta|$ .

LA PARTE REALE  $\rho R \cos \vartheta$  È INVECE DETTA PRODOTTO SCALARE DI  $z$  E  $w$ , E NOTIAMO CHE È UGUALE A 0 SE E SOLO SE  $\widehat{z\bar{w}}$  È UN ANGOLO RETTO.

CALCOLIAMO LE STESSA QUANTITÀ USANDO LE COORDINATE CARTESIANE.

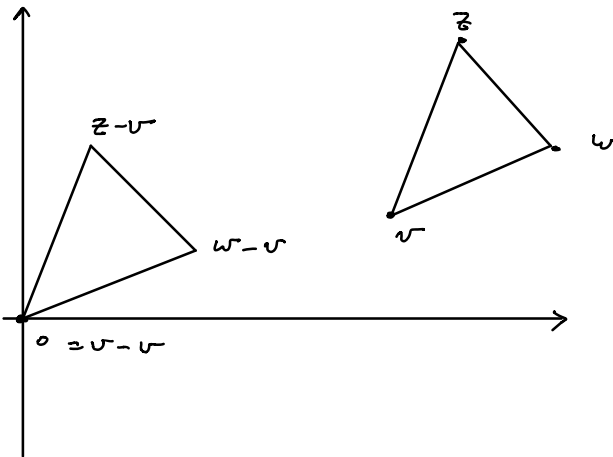
SE  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  OTTIENIAMO

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \text{prodotto scalare} = xu + yv$$

$$|\operatorname{Im}(z\bar{w})| = 2 \operatorname{area}(zow) = |yu - xv|$$

ENTRAMBRE QUESTE FORMOLE VERRANNO GEN. NEL PROSEGUITO DEL CORSO.

LE STESSA CONSIDERAZIONI SI POSSONO FARE NEL CASO DI UN TRIANGOLO QUALSIASI  $v, w, z$  TRASLANDO IL TRIANGOLO IN MODO DA PORTARE UN VERTICE NELL'ORIGINE



## ② CERCHIO PASSANTE PER TRE PUNTI E BIRAPPORTO

SIANO  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  DISTINTI. DEFINISCO IL BIRAPPORTO TRA  $a, b, c, d$  NEL SEGUENTE MODO

$$\operatorname{bir}(a, b, c, d) = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d}$$

VOGLIAMO CAPIRE QUANDO IL BIRAPPORTO È UN NUMERO REALE. ASSUMIAMO  $a, b, c$  NON ALLINEATI, E LASCIAMO IL CASO IN CUI SIANO ALLINEATI COME ESERCIZIO.

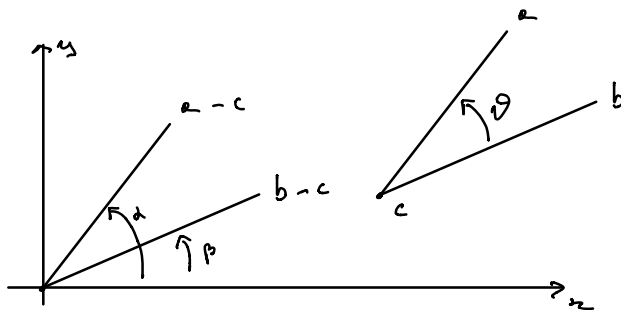
PARTIAMO DALLA CONDIZIONE  $\operatorname{bir}(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$  OVVERO:

$$\operatorname{bir}(a, b, c, d) = \overline{\operatorname{bir}(a, b, c, d)}$$

CHE USANDO LE PROPRIETÀ DEL CONIUGIO E PORTANDO TUTTI I FATTORI CON LA C DA UNA PARTE E QUELLI CON LA D DALL'ALTRA POSSIAMO RISCRIVERE NELLA FORMA

$$(*) \quad \frac{a-c}{\overline{a-c}} \cdot \frac{\overline{b-c}}{b-c} = \frac{a-d}{\overline{a-d}} \cdot \frac{\overline{b-d}}{b-d}$$

ANALIZZIAMO IL TERMINE DI SINISTRA



SE  $a-c = e e^{i\alpha}$  e  $b-c = R e^{i\beta}$  OTTENIAMO

$$\frac{a-c}{\overline{a-c}} = \frac{e e^{i\alpha}}{e e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

$$\frac{\overline{b-c}}{b-c} = \frac{R e^{-i\beta}}{R e^{i\beta}} = e^{-2i\beta}$$

QUINDI IL TERMINE DI SINISTRA È UGUALE A

$$e^{2i(\alpha-\beta)} = e^{2i\vartheta}$$

DOVE  $\vartheta$  È L'ANGOLO,  $\widehat{bca}$ , SIMILMENTE L'ESPRESSIONE SULLA DESTRA DELL'EQUAZIONE È UGUALE A (\*)

$$e^{2i\eta}$$

DOVE  $\eta$  È L'ANGOLO  $\widehat{bad}$  E L'EQUAZIONE (\*)

È EQUIVALENTE A

$$e^{2i\vartheta} = e^{2i\eta}$$

OVVERO

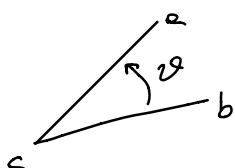
$$2\vartheta = 2\eta + 2k\pi \quad \text{CON } k \in \mathbb{Z}$$

PER STUDIARE IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DI QUEST'ULTIMA EQUAZIONE RICORDO IL SEGUENTE TEOREMA DI GEOMETRIA DEL PIANO.

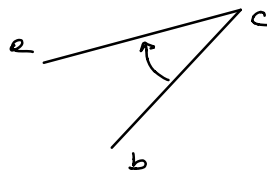
TEOREMA SIANO  $a, b, c$  TRE PUNTI NON ALLINEATI. LA RETTA  $ab$  DIVIDE IL PIANO IN DUE SEMIPIANI  $\Pi^+$ , CHE CONTIENE  $c$ , E  $\Pi^-$ . ALLORA IL CERCHIO  $\Gamma$  PASSANTE PER  $a, b, c$  È IL LUOGO DEI PUNTI  $d$  DI  $\Pi^+$  TALI CHE  $\widehat{bde} = \widehat{bce}$  E DEI PUNTI DI  $\Pi^-$  TALI CHE  $\widehat{bde} = \pi - \widehat{bce}$ .

È NECESSARIO A QUESTO PUNTO FARE UNA PRECISAZIONE SUGLI ANGOLI DEL TEOREMA E SUGLI ANGOLI  $\vartheta$  E  $\eta$  DELL'UGUAGLIANZA CHE ABBIAMO RIQUADROATO SOPRA.

GLI ANGOLI AI QUALI SI FA RIFERIMENTO NEL TEOREMA SONO ANGOLI COMPRESI TRA 0 E  $\pi$  RADIANTI. GLI ANGOLI  $\vartheta$  E  $\eta$  SONO INVECE ARGOMENTI DI NUMERI COMPLESSI E VARIANO QUINDI IN UN INTERVALLO LUNGO  $2\pi$ . IN QUESTO CASO SCELGO  $\vartheta$  E  $\eta$  COMPRESI TRA  $-\pi$  E  $\pi$ .



ANGOLO CON  $\vartheta > 0$



ANGOLO CON  $\vartheta < 0$

SCEGLIENDO  $\vartheta$  E  $\eta$  COMPRESI TRA  $-\pi$  E  $\pi$   $|\vartheta|$  E  $|\eta|$  SONO GLI ANGOLI USUALI

OSSERVO INFINE CHE SE  $d \in \pi^+$   $\gamma \in \mathcal{D}$   
HANNO LO STESSO SEGNO PERTANTO SE  
 $d \in \pi^-$  HANNO SEGNI OPPOSTI.

QUINDI, L'EQUAZIONE  $(*)$  È EQUIVALENTE A:

$$\begin{array}{l} d \in \pi^+ \quad \text{E} \quad |\gamma| = |\mathcal{D}| \\ \text{O} \quad d \in \pi^- \quad \text{E} \quad |\gamma| = \pi - |\mathcal{D}| \end{array}$$

OVVERO  $d \in \Gamma$ , IL CERCHIO PER  $a, b, c$ .