NUMERI COMPLESSI E POLINOMI

1 DIVISIONE TRA POLINOMI

INIZIAMO CON UNA OSSERVAZIONE SEMPLICE MA MOLTO UTILE QUANDO SI USANO I POLINOMI:

Se f È UN POLINOMIO DI GRADO n E g È UN POLINOMIO DI GRADO m ALLORA $f \cdot g$ HA GRADO $n+m$.

QUALCHE ATTENZIONE VA FATTA NEL CASO IN CUI UNO DEI POLINOMI SIA IL POLINOMIO NULLO. SE ATTRIBUISSIMO grado $= 0$ A TALE POLINOMIO QUESTA OSSERVAZIONE SAREBBE FALSA. UNA SOLUZIONE CHE FUNZIONA IN MOLTI CASI È ATTRIBUIRE grado $= -\infty$ AL POLINOMIO NULLO.

LA DIVISIONE TRA POLINOMI È MOLTO SIMILE ALLA DIVISIONE CON RESTO TRA NUMERI NATURALI:

Dati f e g POLINOMI CON $g \neq 0$ SI VUOLE DETERMINARE q e r TALI CHE

1) $f = qg + r$

2) $\text{grado}(r) < \text{grado}(g)$

IL POLINOMIO r SI DICE IL RESTO DELLA DIVISIONE.

I POLINOMI q e r ESISTONO SEMPRE, SONO UNICI E SI POSSONO CALCOLARE CON LO STESSO PROCEDIMENTO CHE SI USA PER I NUMERI INTERI (ANZI UN PÒ PIÙ SEMPLICE).

NE RICORDO I PASSI FONDAMENTALI E LO ILLUSTRO CON UN ESEMPIO.

1° PASSO Se $\text{grado}(f) < \text{grado}(g)$

ALLORA $q = 0$ e $r = f$

2° PASSO Se $\text{grado}(f) \geq \text{grado}(g)$

Sia $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ $a_n \neq 0$

e se $g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \qquad b_m \neq 0$

allora il primo termine di q sarà $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$

e poi sottraggo a f IL POLINOMIO $\frac{a_n}{b_m} \cdot g \cdot x^{n-m}$

E PROSEGUO IN QUESTO MODO

ESEMPIO

$f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$g = 2x^3 + x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
f = 1 \cdot x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & 2x^3 + x + 1 = g \\
\quad x^5 \qquad\quad + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 & \\
\hline
\qquad 3x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = q \\
\qquad 3x^4 \qquad\quad + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x & \\
\hline
\qquad\qquad \frac{5}{2}x^3 - x^2 - x + 1 & \\
\qquad\qquad \frac{5}{2}x^3 \qquad + \frac{5}{4}x + \frac{5}{4} & \\
\hline
r = \qquad -x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} &
\end{array}
$$

A SINISTRA COLORATO C'È a_n E A DESTRA $\frac{a_n}{b_m}$

② REGOLA DI RUFFINI

DEFINIZIONE Se K è un campo indico con $K[x]$ l'insieme dei polinomi a coeff in K nella variabile x.

DEFINIZIONE Se $f(x), g(x) \in K[x]$ dico che f divide g se $\exists\ h(x) \in K[x]$ tale che $f(x) = g(x)\, h(x)$. Se $g \neq 0$ questo è equivalente a richiedere che il resto della divisione di f per g è uguale a 0.

DEFINIZIONE Se $f(x) \in K[x]$, un numero $\alpha \in K$, si dice una RADICE di $f(x)$ se e solo se $f(\alpha) = 0$.

REGOLA DI RUFFINI Sia $f(x) \in K[x]$ e sia $\alpha \in K$.

α è una radice di f se e solo se $(x-\alpha)$ divide $f(x)$.

dim

Effettuiamo la divisione di f per $(x-\alpha)$ otteniamo

$$f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + \rho(x)$$

con $\rho(x)$ un polinomio di grado minore del grado di $x-\alpha$ che è 1. Quindi $\rho(x)$ è una costante $C \in K$.

$$f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + C$$

QUINDI

$$f(\alpha) = (\alpha-\alpha)\, q(\alpha) + C = C$$

QUINDI $f(\alpha) = 0$ SE E SOLO $C = 0$ OVVERO SE E SOLO SE IL RESTO DELLA DIVISIONE È ZERO OVVERO $x-\alpha$ DIVIDE f.

#

③ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI UNA RADICE

SIA $f(x) \in K[x]$ UN POLINOMIO NON NULLO E SIA $\alpha \in K$. SUPPONIAMO CHE $f(\alpha) = 0$ OVVERO CHE $(x-\alpha)$ DIVIDA $f(x)$. LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI α IN $f(x)$ È IL MASSIMO INTERO k TALE CHE $(x-\alpha)^k$ DIVIDE $f(x)$ E LA INDICHEREMO CON $m_\alpha(f)$. SE $f(\alpha) \neq 0$ DICIAMO CHE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA È ZERO OVVERO $m_\alpha(f) = 0$.

QUINDI LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA CI DICE QUANTE VOLTE POSSO DIVIDERE $f(x)$ PER $(x-\alpha)$

ESEMPIO

SIA $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. $f(1) = 0$ E VOGLIAMO CALCOLARE $m_1(f)$. DA $f(1) = 0$ SAPPIAMO PER IL CRITERIO DI RUFFINI CHE $(x-1)$ DIVIDE $f(x)$.

EFFETTUIAMO LA DIVISIONE

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - x + 1 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\ \hline -x+1 & \\ -x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

QUINDI $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)\, f_2(x)$

OSSERVIAMO CHE $f_2(1) = 0$ QUINDI DI NUOVO $(x-1)$ DIVIDE $x^2 - 1$, EFFETUIAMO LA DIVISIONE E OTTENIAMO $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. QUINDI

$$f(x) = (x-1)\, f_2(x) = (x-1)^2 (x+1) = (x-1)^2 f_3(x)$$

ORA $f_3(1) \neq 0$ QUINDI NON POSSIAMO PIÙ DIVIDERE PER $(x-1)$. CIOÈ

$(x-1)^2$ DIVIDE $f(x)$ MA $(x-1)^3$ NON DIVIDE $f(x)$

OVVERO $m_{a_1}(f) = 2$.

OSSERVAZIONE

USANDO IL CRITERIO DI RUFFINI POSSIAMO DESCRIVERE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA ANCHE NEL SEGUENTE MODO: $m_a(f) = k$ SE

$$f(x) = (x-\alpha)^k g(x) \quad \text{E} \quad g(\alpha) \neq 0.$$

INFATTI DIRE CHE $(x-\alpha)^k$ DIVIDE $f(x)$ VUOL DIRE CHE ESISTE $g(x)$ TALE CHE $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, DIRE CHE k È IL MASSIMO INTERO CON QUESTA PROPRIETÀ VUOL DIRE $(x-\alpha)^{k+1}$ NON DIVIDE $(x-\alpha)^k g(x)$ OVVERO $(x-\alpha)$ NON DIVIDE $g(x)$, OVVERO $g(\alpha) \neq 0$.

PROPRIETÀ DELLA MOLT. ALG. $f, g \in K[x]$ NON NULLI

$$me_\alpha(fg) = me_\alpha(f) + me_\alpha(g)$$

dim

Sia $k = me_\alpha(f)$ e $h = me_\alpha(g)$

OVVERO

$$f(x) = (x-\alpha)^k \tilde{f}(x)$$

$$g(x) = (x-\alpha)^h \tilde{g}(x)$$

CON $\tilde{f}(\alpha), \tilde{g}(\alpha) \neq 0$.

ALLORA

$$fg(x) = (x-\alpha)^{k+h} \tilde{f}\tilde{g}(x)$$

e $\tilde{f}\tilde{g}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha) \neq 0$ E QUINDI

$$k+h = me_\alpha(fg)$$

#

④ TERMINI LINEARI DI UN POLINOMIO

EFFETTUANDO IL PROCEDIMENTO DESCRITTO SOPRA PER TUTTE LE RADICI DI UN POLINOMIO NON NULLO f OTTENIAMO

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s}\, h(x) \qquad (*)$$

CON $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in K$ LE RADICI DI f.

$k_i = me_{\alpha_i}(f)$ E h UN POLINOMIO CHE NON HA RADICI $\alpha \in K$.

Esempio

Sia $f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 (x^4 + 2x^2 + 1)$

vogliamo calcolare molteplicità algebriche delle radici di f e quindi scrivere $f(x)$ come nella formula ⊛ sopra. Questo dipende dal campo K.

1° CASO : $K = \mathbb{R}$. In questo caso non c'è più nulla da fare infatti il polinomio $h(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ non ha radici $\alpha \in \mathbb{R}$, poiché per $\alpha \in \mathbb{R}$ $h(\alpha) \geq 1$. Quindi f è già scritto nella forma cercata:

$$f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 \, h(x)$$

f ha radici reali $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ e

$$m_{e_1}(f) = 3 \qquad m_{e_2}(f) = 5$$

2° CASO : $K = \mathbb{C}$. In questo caso il polinomio $h(x)$ ha radici.

$$h(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 = ((x+i)(x-i))^2$$
$$= (x+i)^2 (x-i)^2$$

Quindi

$$f(x) = (x-1)^3 (x-2)^5 (x+i)^2 (x-i)^2$$

quindi le radici complesse sono

$$\alpha = 1 \qquad \alpha = 2 \qquad \alpha = i \qquad \alpha = -i$$

$$ma_1(f) = 3 \qquad ma_2(f) = 5 \qquad ma_i(f) = 2 \qquad ma_{-i}(f) = 2$$

Esempio Sia $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$

vogliamo calcolare le radici di f, le molteplicità algebriche di f. Osserviamo

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1)$$
$$= (x-1)(x^2-1)(x^2+1)$$
$$= (x-1)(x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$$
$$= (x-1)^2(x+1)(x+i)(x-i)$$

Se $K = \mathbb{R}$ le radici sono $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$

$$ma_1 = 2 \qquad ma_{-1} = 1$$

Se $K = \mathbb{C}$ le radici sono $\alpha = 1, -1, i, -i$ con molt. alg. $2, 1, 1, 1$.

OSSERVAZIONE Se uno calcola le molteplicità algebriche per tutte le $\alpha \in \mathbb{C}$ ha calcolato anche tutte le molt. algebriche per tutte le $\alpha \in \mathbb{R}$

5 TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

TEOREMA SIA $f(x)$ UN POLINOMIO IN $\mathbb{C}[x]$ NON COSTANTE, OVVERO GRADO $(f) \geq 1$, ALLORA ESISTE $\alpha \in \mathbb{C}$ E $f(\alpha) = 0$.

QUESTO TEOREMA È DETTO TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA. E NON LO DIMOSTREREMO. PER QUANTO DISCUSSO SOPRA SI PUÒ RIFORMULARE IL TEOREMA NEL MODO SEGUENTE

TEOREMA SIA $f(x)$ UN POLINOMIO IN $\mathbb{C}[x]$ NON NULLO. ALLORA

$$f(x) = C \cdot (x-\alpha_1)^{h_1} \cdots (x-\alpha_s)^{h_s}$$

CON $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ distinti E $h_i = m_{\alpha_i}(f)$.

e C una costante.

⑥ RADICI DI POLINOMI DI GRADO 2.

NEL CASO DEI POLINOMI DI GRADO DUE

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALG. È SEMPLICE DA VERIFICARE. INFATTI LA FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

SE E SOLO SE $\alpha = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

VALE ANCHE SU $\mathbb{C}$, MA MENTRE NEL CASO REALE PER ASSICURARE L'ESISTENZA DI $\sqrt{a^2-4b}$ DOBBIAMO ASSUMERE $a^2-4b \geq 0$ NEL CASO COMPLESSO LA RADICE QUADRATA ESISTE SEMPRE. SIA $w = u + iv$ UN NUMERO COMPLESSO CON $u, v \in \mathbb{R}$ E CERCHIAMO

$z = x + iy$ CON $x, y \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$z^2 = w$$

OTTENIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$$

SE $v = 0$ e $u \geq 0$ OTTENIAMO

$$x = \pm\sqrt{u} \quad e \quad y = 0$$

SE $v = 0$ e $u \leq 0$ OTTENIAMO

$$x = 0 \quad e \quad y = \pm\sqrt{-u}$$

SE $v \neq 0$ ALLORA RICAVO $x, y \neq 0$ E

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{2y} \\ \dfrac{v^2}{4y^2} - y^2 = u \end{cases}$$

DA CUI $$y^4 + uy^2 - \frac{v^3}{4} = 0$$

$$\Delta = u^2 + v^2 \geq 0$$

$$y^2 = \frac{-u \mp \sqrt{\Delta}}{2}$$

POICHE $y \in \mathbb{R}$ $y^2 \geq 0$ E QUINDI

$$y^2 = \frac{-u + \sqrt{\Delta}}{2}$$

E $$y = \pm\sqrt{\frac{-u + \sqrt{\Delta}}{2}}$$

E $$x = \frac{v}{2y}$$ E ABBIAMO RICAVATO z.

7 POLINOMI A COEFF. REALI E RADICI CONIUGATE

IN ALCUNI ESERCIZI ABBIAMO UTILIZZATO LA SEGUENTE OSSERVAZIONE:

Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ E SIA $\alpha \in \mathbb{C}$ TALE CHE $f(\alpha) = 0$.

ALLORA $f(\bar{\alpha}) = 0$.

INFATTI SIA $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$

CON $a_i \in \mathbb{R}$ OVVERO $\overline{a_i} = a_i$. ALLORA

$$f(\bar{\alpha}) = a_n \bar{\alpha}^n + \cdots + a_0$$

E PER LE PROPRIETÀ DEL CONIUGIO

($\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ E $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$) OTTENIAMO

$$
\begin{aligned}
f(\bar{\alpha}) &= \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \cdots + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n \alpha^n + \cdots + a_0} \\
&= \overline{f(\alpha)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$