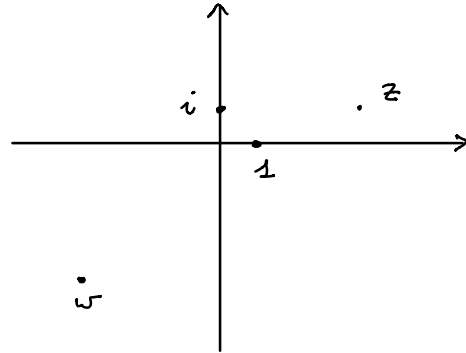


NUMERI COMPLESSI : II PARTE

I NUMERI REALI LI POSSIAMO RAPPRESENTARE GEOMETRICAMENTE COME I PUNTI DI UNA RETTA. ESSENDO COPPIE DI NUMERI REALI, POSSIAMO RAPPRESENTARE I NUMERI COMPLESSI COME PUNTI NEL PIANO CARTESIANO. IL NUMERO $a+bi$ CON $a, b \in \mathbb{R}$ CORRISPONDERÀ AL PUNTO (a, b) .



$$z = 4 + i \quad w = -4 - 4i$$

MOLTE OPERAZIONI TRA I NUMERI COMPLESSI HANNO UNA CHIARA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

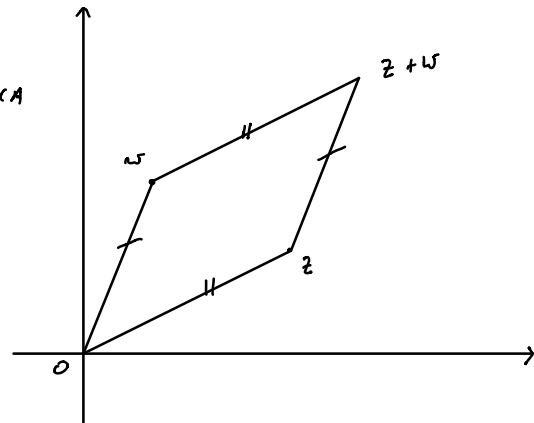
SOMMA E TRASLAZIONI

LA SOMMA HA UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA SEMPLICE

SE $z, w \in \mathbb{C}$ ALLORA IL QUADRILATERO DI VERTICI

$$0, z, z+w, w$$

È UN PARALLELOGRAMMA.



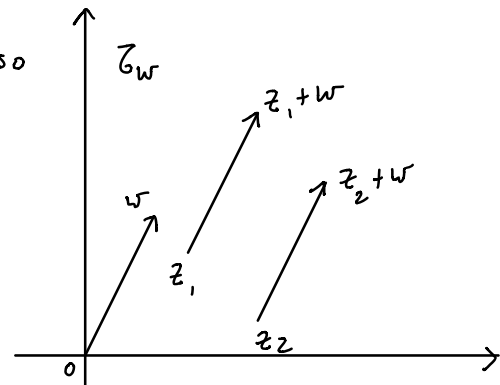
POSSIAMO UTILIZZARE LA SOMMA DI NUMERI COMPLESSI ANCHE PER DESCRIVERE LE TRASLAZIONI DEL PIANO.

$$z = 6 + 3i \\ w = 2 + 5i$$

FISSIAMO UN NUMERO COMPLESSO $w \in \mathbb{C}$.

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE TRASFORMAZIONE DEL PIANO

$$\begin{aligned} \tau_w : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z+w \end{aligned}$$



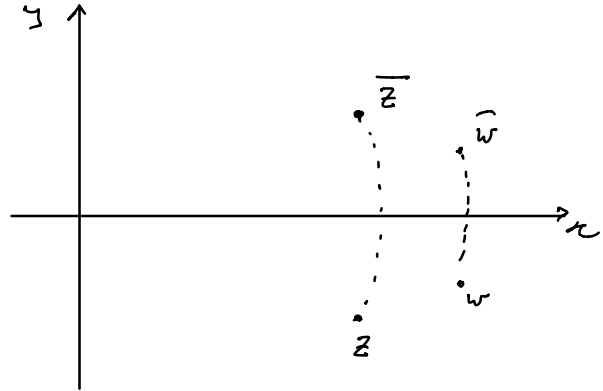
CIÒ È LA TRASFORMAZIONE CHE PRENDE UN NUMERO COMPLESSO z E LO PORTA IN $z+w$. QUESTA È UNA TRASLAZIONE E OGNI TRASLAZIONE PUÒ ESSERE DESCRITTA IN QUESTO MODO.

CONIUGIO

CONSIDERIAMO ADESSO L'OPERAZIONE DI CONIUGIO

$$z \longmapsto \bar{z}$$

$$(a, b) \longrightarrow (a, -b)$$



ANCHE QUESTA HA UNA CHIARA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA E CORRISPONDE ALLA SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE DELLE

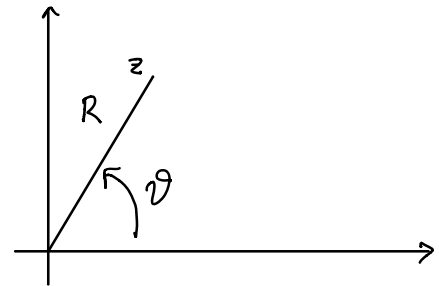
COORDINATE POLARI: MODULO E ARGOMENTO

SIA $z = a + bi \in \mathbb{C}$ CON $a, b \in \mathbb{R}$. QUESTO CORRISPONDE AL PUNTO DEL PIANO (a, b) . E SIANO R, ϑ LE COORDINATE POLARI DEL PUNTO (a, b) . QUINDI

$$R = \text{distanza da } (a, b) \text{ da } (0, 0)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

ϑ È L'ANGOLO CHE IL SEGMENTO $(0, 0) (a, b)$ FORMA CON IL SEMI ASSE DELLE $x \geq 0$ MISURATO IN SENSO ANTICLOCKWISE COME IN FIGURA.



QUANDO SI PARLA DI UN NUMERO COMPLESSO z

• R SI CHIAMA IL MODULO DI z
E SI INDICA CON $|z|$

• ϑ SI CHIAMA L'ARGOMENTO DI z
E SI INDICA CON $\arg(z)$. È UN ANGOLO

RICORDO CHE SE z CORRISPONDE AL PUNTO (a, b) ABBIAMO LE SEGUENTI RELAZIONI TRA COORDINATE CARTESIANE E COORDINATE POLARI

$$a = R \cos \vartheta \quad b = R \sin \vartheta$$

QUINDI

$$\begin{aligned} z &= R \cos \vartheta + R \sin \vartheta i \\ &= R (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \end{aligned}$$

COME VEDREMO QUESTO MODO DI SCRIVERE I NUMERI COMPLESSI È MOLTO UTILE IN VARIE SITUAZIONI.

È VERO ANCHE IL VICEVERSA, OVERO SE

$$z = R (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

CON $R, \vartheta \in \mathbb{R}$ E $R > 0$ ALLORA $R = |z|$ E $\vartheta = \arg(z)$.

INFATTI:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{R^2 (\cos \vartheta)^2 + R^2 (\sin \vartheta)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 ((\cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta)^2)} = \sqrt{R^2} = R \end{aligned}$$

E MI PONGO $\alpha = \arg z$ ABBIAMO

$$\begin{cases} R \cos \vartheta = R \cos \alpha \\ R \sin \vartheta = R \sin \alpha \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \cos \vartheta = \cos \alpha \\ \sin \vartheta = \sin \alpha \end{cases}$$

DA CUI $\alpha = \vartheta$ CONE ANGOLO.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL PRODOTTO

PROPOSIZIONE

SIAMO $z, w \in \mathbb{C}$ ALLORA

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$$

DATI

$$\text{Sia } R_1 = |z| \quad R_2 = |w|$$

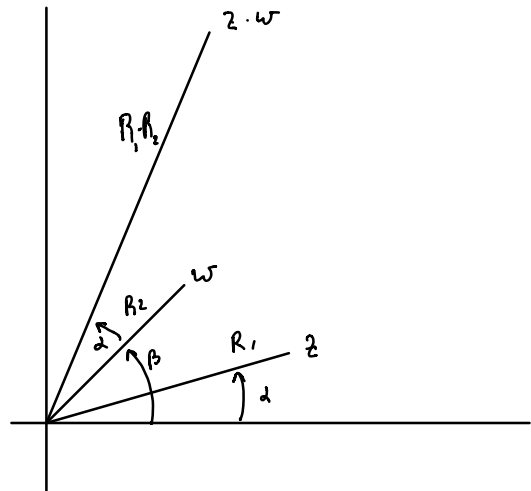
$$\vartheta_1 = \arg(z) \quad \vartheta_2 = \arg w$$

QUINDI

$$z = R_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$$

$$w = R_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

FACCIAMO IL PRODOTTO



$$z \cdot w = R_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) R_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) =$$

$$= R_1 R_2 \left(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + i \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \right. \\ \left. i \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + i^2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \right) =$$

$$= R_1 R_2 \left((\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i (\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \right. \\ \left. + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2) \right)$$

$$= R_1 R_2 \left(\cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right)$$

$$\text{DA CUI } |z \cdot w| = R_1 \cdot R_2 = |z| \cdot |w|$$

$$\arg(z \cdot w) = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \arg z + \arg w$$

#

QUESTO MODO DI DESCRIVERE IL PRODOTTO È UTILE IN MOLTI CASI. VEDIAMO QUALCHE ESEMPIO.

ESERCIZIO SIA $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$.

CALCOLARE z^5 .

CALCOLIAMO $|z|$ E $\arg(z)$.

ABBIAMO $|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

INOLTRE SE $\vartheta = \arg(z)$ ABBIAMO

$$\begin{cases} 1 \cdot \cos \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \cdot \sin \vartheta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

OVVERO $\vartheta = \frac{\pi}{6}$

QUINDI PER LA PROPOSIZIONE $|\frac{z^5}{z}| = |z|^5 = 1^5 = 1$

$$\text{E } \arg(z^5) = 5 \arg(z) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{QUINDI } z^5 &= 1 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \neq \end{aligned}$$

ESERCIZIO RISOLVERE L'EQUAZIONE $z^3 = 1 \neq$

SIA $R = |z|$ E $\vartheta = \arg z$ E

INOLTRE POSSO ASSUMERE $\vartheta \in [0, 2\pi)$

PER LA PROPOSIZIONE APPENA DIMOSTRATA

$$|z|^3 = R^3$$

$$\arg(z^3) = 3\vartheta$$

L'EQUAZIONE $z^3 = 1$ E' EQUIVALENTE

$$\begin{cases} |z|^3 = 1 \\ \arg z^3 = \arg 1 \end{cases} \quad \text{OVVERO} \quad \begin{cases} R^3 = 1 \\ 3\vartheta = 0 \quad \text{come angolo} \end{cases}$$

POICHE' $R \in \mathbb{R}$ DALLA PRIMA EQUAZIONE

RICAVIAMO $R = 1$.

DALLA SECONDA EQUAZIONE RICAVIAMO IN VECE

$$3\vartheta = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

OVVERO
$$\vartheta = \frac{2k\pi}{3}$$

INOLTRE DA $\vartheta \in [0, 2\pi)$ RICAVO

$$0 \leq \frac{2\pi k}{3} < 2\pi$$

OVVERO $0 \leq k < 3$. QUINDI ABBIAMO 3 POSSIBILITÀ

$$k = 0 \quad \vartheta = 0 \quad z = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1 \quad \vartheta = \frac{2\pi}{3} \quad z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 \quad \vartheta = \frac{4\pi}{3} \quad z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ESPOENZIALE COMPLESSO

DEFINIAMO ADESSO COSA VUOL DIRE e^z QUANDO z È UN NUMERO COMPLESSO. A NOI INTERESSERÀ SOPRATTUTTO IL CASO IN CUI $z = yi$ CON $y \in \mathbb{R}$, PERCHÉ LO UTILizzerEMO PER UTILIZZARE LE COORDINATE POLARI IN FORMA PIÙ COMPATTA. LA DEFINIZIONE CHE DAREMO SEMBRERÀ ARBITRARIA, E IN EFFETTI NOI LO UTILizzerEMO SOLO COME FORMALISMO CONVENIENTE. CI SONO DEI MOTIVI PIÙ SOSTANZIALI PER DEFINIRE L'ESPOENZIALE COMPLESSO IN QUESTO MODO CHE VEDRETE PIÙ AVANTI NEL CORSO DI ANALISI.

DEFINIZIONE SIA $z = x + iy$ CON $x, y \in \mathbb{R}$
ALLORA DEFINISCO

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

QUESTO È L'USUALE ESPOENZIALE DI UN NUMERO REALE. IN PARTICOLARE SE $y = 0$ OTTIENIAMO CHE IL SECONDO FATTORE È UGUALE A 1 E QUINDI IL NUOVO ESPOENZIALE COMPLESSO È UGUALE ALL'USUALE ESPOENZIALE DI UN NUMERO REALE

ESEMPIO

$$e^{1 + \pi i} = e^1 (\cos \pi + i \sin \pi) = -e$$

PROPOSIZIONE

- 1) $e^0 = 1$ $e^1 = e$
- 2) Se $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$
 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$
- 3) Se $z, w \in \mathbb{C}$ ALLORA
 $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

DIM 1) E 2) SONO OVVIE.

3) È UN CASO DEL TUTTO SIMILE A QUELLO DELLA DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE IN CUI SI È DESCRITTO IL PRODOTTO E LO LASCIAMO PER ESERCIZIO. #

L'OSSERVAZIONE CHE UTILIZZEREMO SPESSE È CHE DIRE CHE $|z| = R$ E $\arg(z) = \vartheta$ È EQUIVALENTE A DIRE

$$z = R e^{i\vartheta}$$

CON $\vartheta, R \in \mathbb{R}$ E $R \geq 0$. PER NOI L'ESPOENZIALE COMPLESSO SARÀ SOPRATTUTTO QUESTO UN MODO CONVENIENTE DI SCRIVERE LE COORDINATE POLARI.

ESERCIZIO

RISOLVERE L'EQUAZIONE $z^3 \bar{z} = 16$.

SIA $R = |z|$ E $\vartheta = \arg(z)$ CON $\vartheta \in [0, 2\pi)$

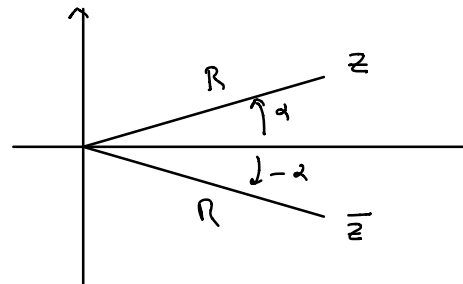
QUINDI $z = R e^{i\vartheta}$.

OSSERVIAMO CHE $|\bar{z}| = R$

E $\arg \bar{z} = -\arg z$

QUINDI $\bar{z} = R e^{-i\vartheta}$.

(QUESTO È UN FATTO GENERALE CHE È UTILE RICORDARE)



L'EQUAZIONE INIZIALE DIVENTA QUINDI

$$(R e^{i\vartheta})^3 (R e^{-i\vartheta}) = 16$$

OVVERO $R^4 e^{3i\vartheta - i\vartheta} = 16$

OVVERO $R^4 e^{2i\vartheta} = 16.$

quindi $R^4 = 16$ e $2\vartheta = 0$ come ANGOLO

DA $R^4 = 16$ OTTENIAMO $R = 2$ PERCHÉ
 $R \in \mathbb{R}$ e $R \geq 0.$

DA $2\vartheta = 0$ come ANGOLO OTTENIAMO
 $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi.$

QUINDI ABBIAMO DUE SOLUZIONI

$$\vartheta = 0 \quad z = 2$$

$$\vartheta = \pi \quad z = -2$$

RADICI n-ESIME DELL'UNITÀ.

VOGLIAMO STUDIARE L'EQUAZIONE $z^n = 1.$

PONIAMO $|z| = R$, $\arg(z) = \vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi)$

QUINDI $z = R e^{i\vartheta}$ E $z^n = R^n e^{in\vartheta}.$

L'EQUAZIONE $z^n = 1$ È QUINDI EQUIVALENTE

$$A \quad \left\{ \begin{array}{l} R^n = |z^n| = 1 \\ n\vartheta = \arg(z^n) = 0 \quad \text{come angolo} \end{array} \right.$$

POICHE' $R \in \mathbb{R}$ E $R \geq 0$ DALLA PRIMA
 E QUAZIONE RI CAVIAMO $R=1$, DALLA
 SECONDA

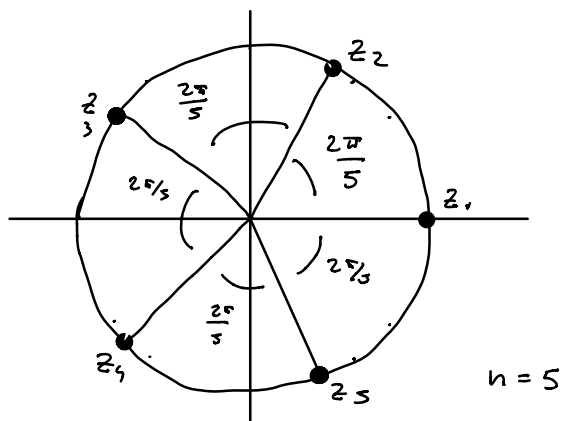
$$n\vartheta = 2k\pi \quad \text{CON } k \in \mathbb{Z}$$

OVVERO
$$\vartheta = \frac{2\pi}{n} k$$

DALLA CONDIZIONE $0 \leq \vartheta < 2\pi$ RI CAVIAMO
 INOLTRE $0 \leq k < n$. QUINDI ESISTONO
 n SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $z^n = 1$,

- $k=0$ $\vartheta=0$ $z_1 = e^{i \cdot 0} = 1$
- $k=1$ $\vartheta=2\pi/n$ $z_2 = e^{2\pi i/n}$
- $k=2$ $\vartheta=4\pi/n$ $z_3 = e^{4\pi i/n}$
-
- $k=n-1$ $\vartheta=2\pi(n-1)/n$ $z_n = e^{2\pi(n-1)i/n}$

GEOMETRICAMENTE QUESTI SONO I VERTICI
 DEL POLIGONO REGOLARE CON n LATI
 ISCRITTO NELLA CIRCONFERENZA UNITARIA
 COME IN FIGURA



SIMILMENTE SI PUÒ RISOLVERE L'EQUAZIONE
 $z^n = w$ DOVE w È UN NUMERO COMPLESSO
QUALSIASI.

$$\text{Sia } w = A e^{i\alpha} \quad \text{con } A = |w| \quad \alpha = \arg(w)$$

$$\text{Sia } R = \sqrt[n]{A} \quad \text{E SIA } \vartheta = \frac{\alpha}{n} \quad \text{E SIA}$$

$$z_0 = R e^{i\vartheta}.$$

$$\text{ALLORA } z_0^n = R^n e^{i n \vartheta} = A e^{i\alpha} = w.$$

z_0 È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE
 $z^n = w$.

CERCHIANDO ORA LE ALTRE SOLUZIONI.

PONIAMO $z = z_0 \cdot u$ ALLORA

$$z^n = z_0^n u^n = w u^n$$

QUINDI $z^n = w$ SE E SOLO SE $u^n = 1$.

QUINDI LE SOLUZIONI DI $z^n = w$ SONO

TUTTE LE z DELLA FORMA

$$z = \sqrt[n]{A} e^{i \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right)}$$

CON $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

#