$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}} \qquad [L_A]^{v_1\, v_2}_{v_1\, v_2} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$B v_1 = 2\, v_1$$
$$B v_2 = 3\, v_2$$

$$[L_B]^{v_1\, v_2}_{v_1\, v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_B(v_1) = 2 v_1 = \underline{2} \cdot v_1 + \underline{0} \cdot v_2$$
$$L_B(v_2) = 3 v_2 = \underline{0}\, v_1 + \underline{3}\, v_2$$

DEFINIZIONE

V UN K-SPAZIO VETTORIALE

$F : \underline{V} \longrightarrow \underline{V}$ UNA APPLICAZIONE K-LINEARE

UN VETTORE $v \neq 0$ SI DICE UN AUTOVETTORE DI F SE $Fv = \lambda v$ PER QUALCHE $\lambda \in K$.

UN NUMERO $\lambda \in K$ SI DICE UN AUTOVALORE DI F SE ESISTE UN $v \neq 0$ E $Fv = \lambda v$.

OSSERVAZIONE

v_1 E v_2 DELL'ESEMPIO PRECEDENTE SONO AUTOVETTORI DI L_B e 2 e 3 SONO AUTOVALORI.

$$L_B(v_1) = 2v_1$$
$$L_B(v_2) = 3v_2$$

DEFINIZIONE

SIA V K-SPAZIO VETTORIALE DI DIM FINITA $F: V \to V$ K LINEARE

$$P_F(t) = \mathrm{Det}(F - tI)$$

SI CHIAMA POLINOMIO CARATTERISTICO DI F.

PROPOSIZIONE

V K-SPAZIO VETTORIALE $\dim V < +\infty$
$F: V \longrightarrow V$ K-LINEARE. ALLORA
λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE $P_F(\lambda) = 0$
OVVERO λ È UNA RADICE DI P_F.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad V = \mathbb{R}^2$$
$$F = L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$p_{L_A}(t) = p_A(t) = \operatorname{Det}(F - t\,Id)$$
$$= \operatorname{Det}(\underline{L_A} - t\,Id)$$

$$[L_A - t\,Id]_{e_1\,e_2}^{e_1\,e_2} = [L_A]_{e_1 e_2}^{e_1 e_2} - t\,[Id]_{e_1\,e_2}^{e_1\,e_2}$$
$$= A - t\,I_2$$

$$\operatorname{Det}\left[\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -5-t & 4 \\ 8 & -1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (-5-t)(-1-t) - 32 =$$

$$= t^2 + 6t + 5 - 32 = \underline{t^2 + 6t - 27}.$$

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 27 = 36 + 108 = 144$$

$$\lambda_1 = \frac{-6+\sqrt{144}}{2} = \frac{-6+12}{2} = \underline{\underline{3}}$$

$$\lambda_2 = \frac{-6-\sqrt{144}}{2} = \frac{-6-12}{2} = \underline{\underline{-9}}$$

- ~~$A v_1 = 2 v_1$~~ $\leftarrow$ $A v_1 = -9 v_1$
- $A v_2 = 3 v_2$

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE

Sia $\lambda \in K$.

λ È UN AUTOVALORE DI F SE E SOLO SE

$\exists\, v \neq 0$ E $Fv = \lambda v$

$Fv - \lambda v = 0$

$Fv - \lambda Id(v) = 0.$

OVVERO

λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE

$\exists\, v \neq 0$ E $(\underbrace{F - \lambda Id_V}) (v) = 0.$

OVVERO

λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE $Ker\, (\overbrace{F - \lambda Id}^{G}) \neq 0$

$G : V \to V$

λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE $(F - \lambda Id)$ NON È INVERTIBILE.

OVVERO

λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE $Det(F - \lambda I) = 0$

$P_F(\lambda)$ //

#

TORNIAMO ALL'ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_A$$

GLI AUTOVALORI SONO $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -9$

SE VOGLIAMO CALCOLARE A^{100} DETERMINIAMO GLI AUTOVETTORI.

$$A v_1 = 3 v_1 \qquad (A - 3I) v_1 = 0$$

$$A v_2 = -9 v_2 \qquad (A + 9I) v_2 = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases} \qquad 2x - y = 0 \qquad \boxed{y = 2x.}$$

$x=1 \qquad y=2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases} \qquad x+y=0. \quad y=-x.$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ v_1 E v_2 SONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$

$A v_1 = 3 v_1 \qquad A v_2 = -9 v_2$

$$[L_A]^{v_1 \, v_2}_{v_1 \, v_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$[L_A^{100}]^{v_1 \, v_2}_{v_1 \, v_2} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \left[L_A^{100} \right]_{e_1 \, e_2}^{e_1 \, e_2}$$

$$\left[L_A^{100} \right]_{e_1 \, e_2}^{e_1 \, e_2} = \underline{\left[Id \right]_{e_1 \, e_2}^{v_1 \, v_2}} \; \underline{\left[L_A^{100} \right]_{v_1 \, v_2}^{v_1 \, v_2}} \; \underline{\left[Id \right]_{v_1 \, v_2}^{e_1 \, e_2}}$$

$$\underline{\left[Id \right]_{e_1 \, e_2}^{v_1 \, v_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[Id \right]_{v_1 \, v_2}^{e_1 \, e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \text{Det} = -3$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$A^{100} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 9^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \dots$$

DEFINIZIONE

$\dim V < +\infty$

$F: V \longrightarrow V$ LINEARE

SI DICE DIAGONALIZZABILE SE ESISTE UNA BASE DI V $v_1 \dots v_n$ FATTA DI AUTOVETTORI

$$F(v_i) = \lambda_i v_i$$

(I λ_i POSSONO ESSERE ANCHE UGUALI)

ESEMPIO

L_A CON A COME NELL'ESEMPIO PRECEDENTE È DIAGONALIZZABILE.
v_1 e v_2 ERANO UNA BASE DI AUTOVETTORI.

ESEMPIO

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

NON È DIAGONALIZZABILE.

CERCHIAMO v_1, v_2 BASE CON

$$Bv_1 = \underline{\lambda_1} v_1 \qquad B v_2 = \underline{\lambda_2} v_2$$

CALCOLIAMO I POSSIBILI λ_1, λ_2 OVVERO GLI AUTOVALORI.

$$P_B = \mathrm{Det}(L_B - tI) = \mathrm{Det}(B - tI) =$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = \underline{(1-t)^2}$$

QUINDI C'È UN UNICO AUTOVALORE $\lambda = 1$.

$$\underline{B v_1 = v_1} \qquad B v_2 = v_2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = 0.$$

GLI AUTOVETTORI SONO TUTTI DELLA FORMA $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MA DUE VETTORI COSÌ NON SONO MAI UNA BASE.

ESEMPIO

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = L_C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

NON È DIAGONALIZZABILE.

OVVERO NON ESISTE UNA BASE v_1 v_2 DI $\mathbb{R}^2$

TALE CHE $\quad C \cdot v_1 = \underline{\lambda_1}\, v_1 \qquad C \cdot v_2 = \underline{\lambda_2}\, v_2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

I POSSIBIBILI AUTOVALORI SONO LE RADICI DEL POLINOMIO

$$\mathrm{Det}\,(C - tI) = \mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1.$$

QUINDI NON CI SONO AUTOVALORI $\in \mathbb{R}$

ESEMPIO

L'APPLICAZIONE $\quad Id_V : V \longrightarrow V$

(LO STESSO VALE PER $7\, Id_V$)

È DIAGONALIZZABILE.

SIA $v_1 \dots v_n$ UNA BASE DI V.

$$Id_V(v_i) = v_i$$

$Id(v_1) = v_1$
$Id(v_2) = v_2$
$Id(v_3) = v_3$

$$[Id]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} = I_n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \underset{\infty\text{-volte}}{\text{derivabili}} \}.$$

$$D : V \to V \qquad D(f) = f'.$$

UN ELEMENTO DI V È UN AUTOVETTORE SE

$$D(f) = \lambda f$$

$$f' = \lambda f.$$

$$f = e^{\lambda t} \qquad D(f) = \lambda f.$$

ESEMPIO

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_C : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$P_C(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$$

$$\lambda_1 = -i \qquad \lambda_2 = i$$

$$* \; C v_1 = -i v_1 \qquad ** \; C v_2 = i v_2$$

$*$ $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$**$ $$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 .$$

$*$ $$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases} \cdot i$$

$$x = iy$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$**$ $$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases} \cdot i$$

$y = ix$.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$C v_1 = -i v_1 \qquad C v_2 = i v_2$$

v_1 e v_2 SONO UNA E L_C È DIAGONALIZZABILE.

PROPOSIZIONE $F: V \to V$ K-LINEARE

$$F(v_i) = \lambda_i v_i \qquad i = 1 \dots n \qquad v_i \neq 0$$

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ DISTINTI

ALLORA $v_1 \dots v_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

DIM. NEL CASO $n = 2$

$$F(v_1) = \lambda_1 v_1 \qquad F(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2} \qquad v_1, v_2 \neq 0$$

p.a. SE v_1 E v_2 SONO LIN. DIPENDENTI

ALLORA $v_1 = s\, v_2$ $s \in K$.

$$\underline{\underline{\lambda_1 v_1}} = F(v_1) = F(s v_2) = s\, F(v_2) = s\, \lambda_2 v_2 =$$
$$= \lambda_2 (s v_2) = \underline{\underline{\lambda_2 v_1}}$$

$$\lambda_1 v_1 = \lambda_2 v_1$$

$$\underline{(\lambda_1 - \lambda_2)}\, v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

DIM. NEL CASO GENERALE

p.i. su n. $n = 1$ UN VETTORE $v_1 \neq 0$ È LIN. INDIP.

SE È VERO PER n $\Rightarrow$ è VERO PER $n+1$.

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + a_{n+1} v_{n+1} = 0$$

E DIMOSTRIAMO CHE $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$.

$$\underline{F(a_1 v_1 + \dots + a_{n+1} v_{n+1})} = F(0) = 0$$
$$\shortparallel$$
$$a_1 F(v_1) + \dots + a_{n+1} F(v_{n+1}) = 0$$

• $0 = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_n \lambda_n v_n + \boxed{a_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1}}$

$$\bullet \quad 0 = a_1 v_1 + \dots\dots\dots + a_{n+1} v_{n+1}$$

Se moltiplico la seconda equazione per λ_{n+1} ottengo

$$0 = a_1 \lambda_{n+1} v_1 + a_2 \lambda_{n+1} v_2 + \dots + a_n \lambda_{n+1} v_n + \boxed{a_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1}}$$

E LA SOTTRAGGO ALLA PRIMA EQUAZIONE

$$0 = \underbrace{a_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1})}_{} v_1 = + \underbrace{a_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1})}_{} v_2 = + \dots + \underbrace{a_n (\lambda_n - \lambda_{n+1})}_{} v_n =$$

p.i. so che $v_1 \dots v_n$ sono L.I. e quindi

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0 \qquad e \quad \lambda_1 - \lambda_{n+1} \neq 0$$
$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) = 0 \qquad e \quad \lambda_2 - \lambda_{n+1} \neq 0$$
$$\dots$$
$$a_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0 \qquad e \quad \lambda_n - \lambda_{n+1} \neq 0$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad \dots \quad a_n = 0.$$

$$a_{n+1} v_{n+1} = 0$$

e quindi anche $a_{n+1} = 0$ #