SOTTOSPAZI VETTORIALI

V È UN K-SPAZIO VETTORIALE

Se $W \subset V$ SI DICE UN K-SOTTOSP. VETTORIALE

1) $0_V \in W$
2) Se $u, v \in W$ allora $u+v \in W$
3) Se $u \in W$ e $a \in K$ allora $a \cdot u \in W$

ESEMPI $V = \mathbb{R}^2$

$$\boxed{W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{x + 3y = 0} \}}$$

W è un sottospazio vettoriale

1) $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in W$ $\quad 0 + 3 0 = 0$.

2) Se $u = (x, y)$ $\quad v = (a, b)$ $\quad u, v \in W$

questo vuol dire $x + 3y = 0$ $\quad a + 3b = 0$

$u + v = (x + a, y + b)$

$$(x+a) + 3(y+b) = \underline{x + 3y} + \underline{a + 3b}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

quindi $u + v \in W$

3) Se $u = (x, y) \in W$ e $a \in K$

$\alpha u = (\widehat{\alpha x}, \widehat{\alpha y})$

$\alpha x + 3\alpha y = \alpha \overbrace{(x+3y)}^{0} = \alpha \cdot 0 = 0.$

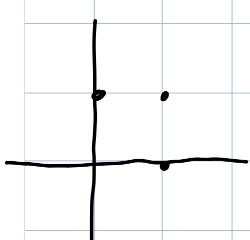
quindi $\alpha u \in W$.

$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy = 1 \}$

$Y = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy = 0 \}$

$Z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 0 \}$

X non è un sottospazio perché $(0,0) \notin X$



Y non è un sottospazio

infatti Y NON VERIFICA

che SE $\overline{u, v} \in Y$ ALLORA $u+v \in Y$.

$u = (1,0) \qquad v = (0,1)$

$u, v \in Y \qquad u+v = (1,1) \notin Y$

$Z = \{ (0,0) \}$ è un sottospazio.

OSSERVAZIONE

1) $W = V$ è un sottospazio vettoriale di V

2) $W = \{ 0_V \}$ è un sottospazio vettoriale

3) Su un sottospazio $W \subset V$
$0_V \in W$ È DEFINITA UNA SOMMA E UN PRODOTTO PER SCALARE E VERIFICANO TUTTE LE PROPRIETÀ DEGLI SP. VETTORIALI.

ESEMPI

① $V = K^n$
$W = \{ (x_1, \dots x_n) \in K^n : x_1 + 2x_3 - x_4 + x_n = 0 \}$

W È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

② $X = \mathbb{R}$ $V = \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$W = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ è un polinomio} \}$

W È UN SOTTOSPAZIO VETT.

1) • $0_V \in W$

2) • Se sommate due polinomi ottenete un polinomio

3) • Se moltiplicate un polinomio per un numero ottenete un polinomio

NOTAZ. $W = \mathbb{R}[t]$

Similmente $\mathbb{C}[t]$

3. V come prima $V = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R}[t]_{\leq n} = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ è un polinomio di grado } \leq n \}$$

$$\mathbb{R}[t]_{\leq n} \subset \mathbb{R}[t] \subset V$$

sono sottospazi vettoriali.

4. $V = Mat_{4\times 4}(K)$

$$T_2 \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{pmatrix} = \underline{a_{11}} + \underline{a_{22}} + \underline{a_{33}} + \underline{a_{44}}$$

- $T_2(A+B) = T_2(A) + T_2(B)$
- $T_2(a A) = a\, T_2(A)$

$W = \{ A \in V : T_2(A) = 0 \}$

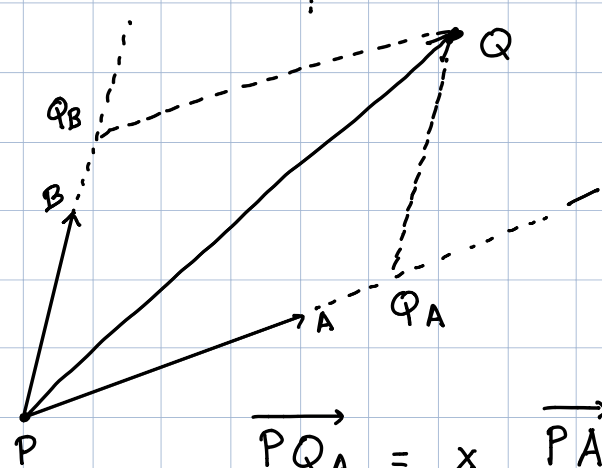
W è un sottospazio

- $O_V \in W \quad T_2(O_V) = 0$

• Se $A, B \in W$ ovvero $T_2(A) = T_2(B) = 0$
allora
$$T_2(A+B) = T_2(A) + T_2(B) = 0 + 0 = 0$$
• Se $A \in W$ e $a \in K$ $T_2(A) = 0$
allora $T_2(aA) = a\,T_2(A) = a \cdot 0 = 0.$

BASE DI UNO SP. VETTORIALE.

<u>Esempio</u> Π è il piano nel quale fissiamo un'origine P. $V = \{ \overrightarrow{PA} : A \in \Pi \}$



$$\overrightarrow{PQ_A} = x\,\overrightarrow{PA} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\overrightarrow{PQ_B} = y\,\overrightarrow{PB} \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{PQ} = x\,\overrightarrow{PA} + y\,\overrightarrow{PB}$$

DEFINIZIONE

SIA V UN K-SPAZIO VETTORIALE
ALLORA UNA BASE (FINITA) DI V
È UNA LISTA $v_1, \dots, v_n$ DI ELEMENTI
DI V (ORDINATA) TALE CHE

$$\forall v \in V \quad \exists_1 \; a_1, a_2, \dots, a_n \in K :$$
$$v = \underline{\underline{a_1}}\, v_1 + \underline{\underline{a_2}}\, v_2 + \dots + \underline{\underline{a_n}}\, v_n$$

ESEMPIO

- $V = \mathbb{C}^3$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0)$$
$$e_3 = (0, 0, 1)$$

e_1, e_2, e_3 SONO UNA BASE DI $\mathbb{C}^3$
DEVO VERIFICARE CHE $\forall v \in \mathbb{C}^3$
$v = (x, y, z) \quad \exists_1 \; a_1, a_2, a_3 :$

$$\boxed{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = v}$$

$$\underline{a_1 (1,0,0)} + a_2 (0,1,0) + a_3 (0,0,1) = (x, y, z)$$

$$(a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = (x, y, z)$$

$$\boxed{(a_1, a_2, a_3) = (x, y, z)}$$

deve essere $a_1 = x$ $\quad a_2 = y$ $\quad a_3 = z$.

$V = \mathbb{C}^2$ $\qquad v_1 = (1, 1)$ $\qquad v_2 = (1, 2)$

v_1 v_2 sono una base di $\mathbb{C}^2$

ovvero $\forall (x, y)$ $\exists_1$ a_1 a_2 tali che

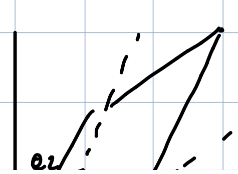
$$\boxed{a_1 v_1 + a_2 v_2 = (x, y)}$$

$$a_1 (1, 1) + a_2 (1, 2) = (x, y)$$

$$(a_1 + a_2, a_1 + 2a_2) = (x, y)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ a_2 = y - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned} a_1 &= 2x - y \\ a_2 &= y - x \end{aligned}} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$



$(4, 6)$