SPAZIO VETTORIALE

K un campo $(K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

UNO SPAZIO VETTORIALE SU K.
È UN INSIEME V MUNITO DI
DUE OPERAZIONI

Dati $u, v \in V$ È DEFINITO $u+v$

Dato $u \in V$ e $a \in K$ È DEFINITO $a \cdot u$

E DI UN ELEMENTO 0_V CHE SI CHIAMA LO ZERO, CHE VERIFICANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

COMMUTATIVA $+$

$\forall\, u, v \in V \qquad u+v = v+u$

ASSOCIATIVA

$\forall\, u, v, w \in V \qquad u + (v+w) = (u+v)+w$

$\forall\, a, b \in K$ e $\forall\, v \in V \qquad (a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$

ELEMENTO NEUTRO

$\forall\, v \in V \qquad 0_V + v = v$

$\forall\, v \in V \qquad 1 \cdot v = v$

OPPOSTO

$\forall\, v \in V \quad \exists_1\, u \in V : \quad u+v = 0_V$

DISTRIBUTIVA

$\forall\, a \in K \;\; \forall\, u, v \in V \qquad a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$

$\forall\, a, b \in K \;\; \forall\, v \in V \qquad (a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

l'unico elemento u tale che $u+v=0_V$ si chiama l'opposto di v E SI INDICA CON $-v$.

ESEMPI

- K^n è uno SPAZIO VETTORIALE

  SE MUNITO DI $+$ $\cdot$ DEFINITI COME NELLE LEZIONI PRECEDENTI

DOBBIAMO VERIFICARE CHE $K^n, +, \cdot, 0_{K^n}$ HA TUTTE LE PROPRIETÀ ELENCATE PRIMA. QUESTA È UNA VERIFICA LUNGA MA SEMPLICE. VERIFICHIAMO SOLO LE PRIME DUE.

COMMUTATIVA

Sia $u=(u_1 \dots u_n)$ $\quad u_i \in K$

$v=(v_1 \dots v_n)$ $\quad v_i \in K$.

$$u+v \underset{\text{DEF}}{=} (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n) =$$

COMM. DI K.

$$= (v_1+u_1, v_2+u_2, \dots, v_n+u_n) \underset{\text{DEF.}}{=} v+u$$

ASSOCIATIVA

$\forall u, v, w \in K^n \quad (u+v)+w = u+(v+w)$

$u=(u_1, u_2 \dots u_n) \quad u_i \in K$

$$v = (v_1, v_2 \dots v_n) \qquad v_i \in K$$

$$w = (w_1, w_2 \dots w_n) \qquad w_i \in K$$

$$(u+v)+w \overset{\text{DEF. +}}{=} \overbrace{(u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)} + (w_1, \dots, w_n)$$

DEF. + $\rightarrow = \left((u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2, \dots, (u_n+v_n)+w_n\right)$

ASSOC. DI K. $\rightarrow = \left(u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2), \dots, u_n+(v_n+w_n)\right)$

DEF+ $= (u_1, u_2, \dots u_n) + (v_1+w_1, v_2+w_2, \dots, v_n+w_n)$

DEF+ $= u + (v+w)$

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

- $\mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ CON LA SOMMA E IL PRODOTTO PER SCALARE DEFINITI IN PRECEDENZA SONO UNO SPAZIO VETTORIALE.

- Sia X un insieme e K un campo

$$V = \mathcal{F}_K(X) = \{ f : X \longrightarrow K \text{ funzione} \}$$

\+ Se $f, g \in V$ definisco $f \underset{V}{+} g$

somma in K.

$$(f \underset{V}{+} g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Se $f \in V$ e $a \in K$ definisco $a \underset{V}{\cdot} f$

$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$ prodotto tra numeri.

Infine 0_V è la funzione

$\underline{\underline{0_V}}(x) = 0$ per ogni x. lo zero di K.

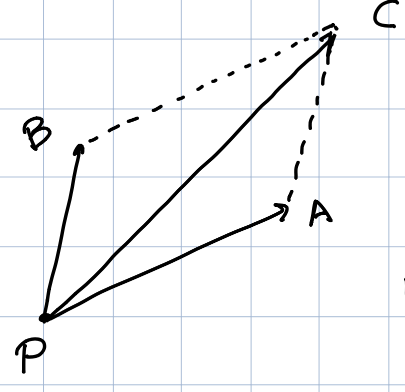
• I VETTORI GEOMETRICI

Sia Π il piano euclideo e fissiamo un'origine P.

$V = \{$ Segmenti $\overrightarrow{PA}$ orientati che partono in P dove $A \in \Pi \}$

V È IN CORRISPONDENZA CON Π

+ SOMMA IN V.



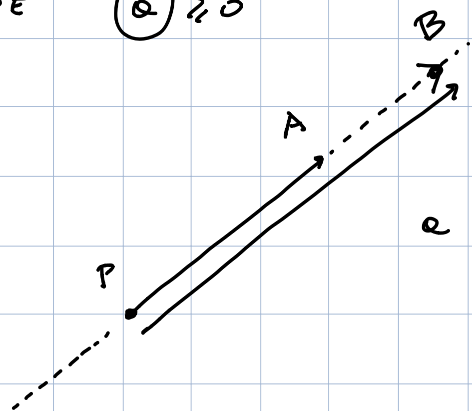
DEFINISCO

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$$

DOVE C È IL TERZO DEL PARALL. IN FIGURA.

• SE $a \in \mathbb{R}$ E $\overrightarrow{PA} \in V$ DEFINISCO $a \cdot \overrightarrow{PA}$ NEL SEGUENTE MODO:

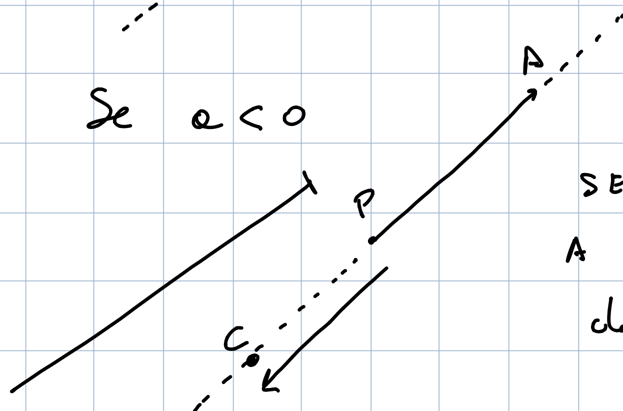
Se $a \geq 0$ SCELGO B SULLA SEMIRETTA PA TALE



$$a \, \mathrm{dis}(P, A) = \mathrm{dist}(P, B)$$

$$a \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$$

Se $a < 0$ SCELGO C SULLA SEMIRETTA OPPOSTA A PA TALE



$$\mathrm{dist}(P, C) = |a| \, \mathrm{dist}(P, A)$$

$$a \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC}$$

$$O_V = \overrightarrow{PP}$$