9.2

$$F: \mathbb{C}[t] \longrightarrow \mathbb{C}[t]$$

$$F(p(t)) = (t^2-5t)\,p(t)$$

F è lineare

- $F(p(t)+q(t)) = (t^2-5t)\cdot(p(t)+q(t)) =$

$$= \underline{(t^2-5t)\,p(t)} + \underline{(t^2-5t)\,q(t)}$$
$$= F(p(t)) + F(q(t))$$

- $F(\lambda\cdot p(t)) = (t^2-5t)\cdot\lambda\cdot p(t)$

$$= \lambda\cdot\underbrace{(t^2-5t)\,p(t)}$$
$$= \lambda\ F(p(t))$$

F è iniettiva

per verificare l'iniettività calcolo $N(F)$.

$$N(F) = \{p(t) : \ F(p(t)) = 0\}$$
$$= \{p(t) : \ \underline{(t^2-5t)}\ \underline{p(t)} = 0\} = \{0\}.$$

F è surgettiva? $\quad F: V \longrightarrow V$

F surgettiva vuol dire che tutti i polinomi q si possono scrivere come $F(p)$

- $\underline{(t^2-5t)\ p(t)}$.

per esempio i polinomi di grado ≤ 1
non si scrivono così.

- $G : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$

$$G(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix}$$

- G è lineare (verifica ...)
- G è iniettiva?

$$N(G) = \{p : G(p) = 0\} =$$
$$= \{p : p(1) = p(3) = p(7) = 0\}$$

$$p(t) = (t-1)(t-3)(t-7)$$

$p \in N(G)$ e $p \neq 0$.

G non è iniettiva.

- G è surgettiva? sì

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ \exists \ p \in V :$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = p(1) \\ y = p(3) \\ z = p(7) \end{cases}$$

Scelgo $p(t) = at^2 + bt + c$

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = 9a + 3b + c \\ z = 49a + 7b + c \end{cases}$$

e poi devo verificare che questo sistema ha soluzione.

$$\begin{array}{lll} f_1 = (t-3)(t-7) & & 3 \quad 7 \\ f_3 = (t-1)(t-7) & & 1 \quad 7 \\ f_7 = (t-1)(t-3) & & 1 \quad 3 \end{array}$$

$$p = a f_1 + b f_3 + c f_7$$

$$G(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(3) \\ p(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, f_1(1) \\ b\, f_3(3) \\ c\, f_7(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 12a = x \\ -8b = y \\ 24c = z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x/12 \\ b = -y/8 \\ c = z/24 \end{cases}$$

- $H : \mathbb{C}^3 \longrightarrow V$

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x(t-1) + y(t-3) + z(t-7) +$$

$(t-8)$

H non è lineare

$$H\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = t-8 \neq 0.$$

ESEMPIO DI MATRICE ASSOCIATA.

$$V = \mathbb{C}[t]_{\leq 2} \qquad W = Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

$$F: V \longrightarrow W$$

$$F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(1) & p'(2) \end{pmatrix}$$

F è una applicazione lineare.

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$ una base di V

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = (t-1) \qquad v_3 = (t-2)^2$$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4$ una base di W.

$$w_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = [F]^{v_1 v_2 v_3}_{w_1 w_2 w_3 w_4} \qquad \text{è } 4 \times 3$$

Le prime colonne di A

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[F(v_1)]_{w_1 w_2 w_3 w_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} = \underline{x}\, w_1 + \underline{y}\, w_2 + \underline{z}\, w_3 + \underline{u}\, w_4$$

$$= \underline{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underline{y} \begin{pmatrix} \underline{0} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{z} \begin{pmatrix} \underline{0} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{u} \begin{pmatrix} \underline{0} & 0 \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 \quad z = 1 \quad y = -1 \quad u = -1$$

$$[F(v_1)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(p) = \begin{pmatrix} \underline{P(0)} & \underline{P(1)} \end{pmatrix}$$

$$\quad -1 \qquad\qquad\qquad p'(1) \quad p'(2)$$

$v_2 = t-1$ $\qquad\qquad$ $v_2' = 1.$

$$F(v_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$v_3 = (t-2)^2$ $\qquad\qquad$ $2(t-2)$

$$F(v_3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underline{y}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{u}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = -1 \quad z = 0 \quad y = 1 \quad u = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underline{y}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{u}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = 4 \quad z = 1 \quad y = -3 \quad u = -4$

$$[F(v_2)]_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad [F(v_3)]_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} [F(v_1)]_{\underline{w}} & [F(v_2)]_{\underline{w}} & [F(v_3)]_{\underline{w}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

$V \longleftrightarrow K^3$ $\quad v \longrightarrow$ calcolate le coordinate..

$W \longleftrightarrow K^4$ $\quad w \longrightarrow$ calcola le coordinate..

$$\boxed{\begin{tikzcd} K^3 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "G"'] & V \arrow[r, "F"] & W \arrow[r] & K^4 \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \boxed{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}}$$

$$\boxed{[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \, [v]_{\underline{v}} = [F(v)]_{\underline{w}}}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$V, W \quad K$- sp. vettoriali.

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{ F : V \to W \quad K\text{-lineari} \}$$

Se $v_1 \dots v_n$ è una base di V
Se $w_1 \dots w_m$ è una base di W

$$\underline{\mathrm{Hom}(V,W)} \xrightarrow{\mathcal{M}} \underline{\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)}$$

$$F \longmapsto [F]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$$

- $\mathcal{M}$ è lineare, iniettiva e suriettiva.

dim

- $\mathcal{M}(F+G) = \mathcal{M}(F) + \mathcal{M}(G)$
- $\mathcal{M}(\lambda F) = \lambda \mathcal{M}(F)$

l'i-esima colonna di $\boxed{\mathcal{M}(F+G)}$

$$\left[(F+G)(v_i)\right]_{\underline{w}} = \left[F(v_i) + G(v_i)\right]_{\underline{w}} =$$

$$= \left([F(v_i)]_{\underline{w}} \right) + \left([G(v_i)]_{\underline{w}} \right)$$

i-esima colonna di $\mathcal{M}(F)$

i-esima colonna di $\mathcal{M}(G)$

quindi $\quad \mathcal{M}(F+G) = \mathcal{M}(F) + \mathcal{M}(G)$

$\mathcal{M}$ è iniettiva $\quad N(\mathcal{M})$

$$N(\mathcal{M}) = \{ F : \underline{\mathcal{M}(F) = 0} \}$$

ALLORA $\quad \underline{[F(v)]}_{\underline{w}} = 0 \cdot [v]_{\underline{v}} = \underline{0}$

quindi $\quad F(v) = 0 \quad \forall v \in V.$

quindi $\quad F = 0.$

$\mathcal{M}$ è suriettiva $\quad A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$

e cerco F tale che $[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = A.$

$$\begin{tikzcd} v & v_i & V \arrow[rrr, "F"] & & & W & w \end{tikzcd}$$

$$K^m \ni \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$F : v \longrightarrow [v]_{\underline{v}} \longrightarrow L_A \cdot [v]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \longrightarrow y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$$

quindi F è composizione di app. lineari
e quindi è lineare

$$[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} = A.$$

$$[F(v_i)]_{\underline{w}} =$$

$$\begin{tikzcd}
e_i \arrow[rrr, bend left, mapsto] & K^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, leftrightarrow] & K^m \arrow[d, leftrightarrow] & A \cdot e_i \\
v_i \arrow[u, mapsto] & V \arrow[r, "F"] & W & w
\end{tikzcd}$$

$$v_i = \underline{x_1} v_1 + \cdots \quad \underline{x_i} v_i + \cdots \quad + \underline{x_n} v_n$$

$$0 v_1 + 0 v_2 \quad + 1 \cdot v_i + \cdots \quad + 0 \cdot v_n$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \text{i-esima colonna di } A.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

quindi $[F(v_i)]_{\underline{w}}$ è la i-esima colonna di A.

e è anche la i-esima colonna $[F]_{\underline{w}}^{\underline{v}}$

ovvero $[F]_{\underline{w}}^{\underline{v}} = A$.

#

Esercizio

$$V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \qquad W = Mat_{3\times 4}(\mathbb{C})$$

$$\dim_{\mathbb{C}} Hom(V, W) =$$

$\dim V = 4.$

$\dim W = 12$

m

$$\mathrm{Hom}(V,W) \longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{12\times 4}$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{M}) = \mathrm{Mat}_{4\times 12}$$
$$N(\mathcal{M}) = 0$$

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim \mathrm{Mat}_{12\times 4} = 48.$$

$F: V \to W$ $\quad [F]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$ è 12×4.

Esercizio V non è uno spazio vettoriale di dimensione finita. $V = \mathbb{C}[t]$.

dim

p.a. Sia V di dim. finita.

Siano $f_1, f_2, \dots, f_m$ un insieme
$\qquad d_1 \quad d_2 \qquad\quad d_m$

di generatori di V.

$$d_i = \text{grado } f_i$$

Sia $d = \max(d_1, \dots, d_m)$

Se $f = (a_1 f_1 + \dots + a_m f_m)$ con $a_i \in \mathbb{C}$.

allora ~~grado $f \le d$.~~ ma esistono

polinomi di grado $> d$. #

Esempio

Π il piano con una origine

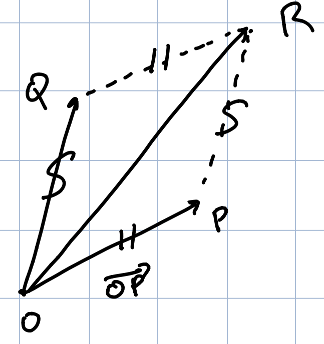
fissata O

$F : \Pi \longrightarrow \Pi$ $\quad F(O) = O$

e F è una isometria

F è lineare $\quad P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP}$ ...

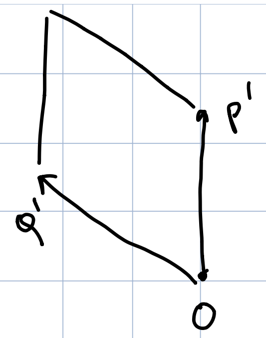
$$F(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = F(\overrightarrow{OP}) + F(\overrightarrow{OQ})$$



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

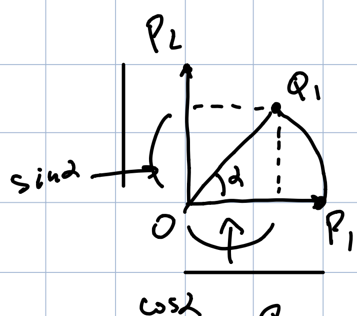
$F(O) = O$
$F(P) = P'$
$F(Q) = Q'$
$F(R) = R'$

R'



$$\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR'}$$

Sia F la rotazione di angolo α



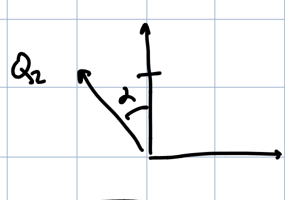
$\overline{OP_1} = 1 = \overline{OP_2} = 1$

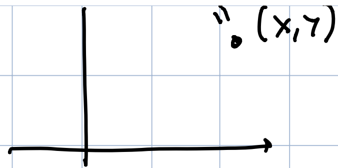
OP_1 e OP_2 ortogonali.

$$\mathcal{B} = OP_1, OP_2$$

$$[F]^{OP_1, OP_2}_{OP_1, OP_2} = \left([F(P_1)]_{\mathcal{B}} \quad [F(P_2)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$Q_1 = \qquad [F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$





$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OP_1} + y\overrightarrow{OP_2}$$

allora

$$[F(P)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$