$$L_A : K^n \longrightarrow K^m \qquad L_A(x) = A \cdot x$$

Se A è una matrice $n \times m$.

V uno spazio vettoriale. $v_1 \dots v_n$ una base
W " " $w_1 \dots w_m$ una base

$$\begin{array}{ccccccc} K^n & \xleftrightarrow{\sim} & V & \xrightarrow{\quad F \quad} & W & \longrightarrow & K^m \\ [v]_{\underline{v}} & \longleftarrow & v & & w & \longrightarrow & [w]_{\underline{w}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

$F : V \longrightarrow W$ lineare

$$K^n \longrightarrow K^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \longrightarrow F(v) \longrightarrow [F(v)]_{\underline{w}}$$

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \qquad W = \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$

$$F : V \longrightarrow W \qquad F(p) = p'$$

$$(p+q)' = p' + q'$$
$$(\lambda p)' = \lambda p'$$

$1, t, t^2$ è una base di V.

$1, t$ è una base di W

$$K^3 \longrightarrow K^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1 + x_2 t + x_3 t^2 \xrightarrow{F} x_2 + 2x_3 t$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$K^3 \xrightarrow{L_A} K^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>DEFINIZIONE</u> V e W due K-spazi di dim finita.

$\underline{v}$: $v_1, \dots, v_n$ una base di V

$\underline{w}$: $w_1, \dots, w_m$ una base di W

$F : V \longrightarrow W$ K-lineare

La matrice associata a F rispetto alle basi $\underline{v}$ e $\underline{w}$, che si indica $[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$ è la seguente matrice $m \times n$.

L' i-esima colonna della matrice è il seguente vettore colonna con m entrate.

$$[F(v_i)]_{\underline{w}}$$

PROPOSIZIONE

$$\boxed{\underline{[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}}} \cdot \underline{[v]_{\underline{v}}} = \underline{[F(v)]_{\underline{w}}}}$$

dim

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \qquad [v]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F(v) = F(x_1 v_1) + \cdots + F(x_n v_n)$$
$$= x_1 F(v_1) + \cdots + x_n F(v_n)$$

$$[F(v)]_{\underline{w}} = x_1 \underline{[F(v_1)]_{\underline{w}}} + \cdots + x_n \underline{[F(v_n)]_{\underline{w}}}$$

$$= \underline{x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n}$$

dove C_1 è la prima colona della matrice $[F]^{\underline{v}}_{\underline{w}}$

C_2 " " seconda colonna

C_n " " n-sima colonna.

$$[F(v)]_{\underline{w}} = (C_1 \quad C_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [F]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [v]_{\underline{v}}$$

#

OSSERVAZIONE

Se $F: K^n \longrightarrow K^m$ è lineare e se $A = [F]^{e_1, \dots, e_n}_{e_1, \dots, e_m}$ allora

$$F = L_A$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \quad [v]_{e_1, \dots, e_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = v$$

$$w = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_m \end{pmatrix} \in K^m \quad [w]_{e_1, \dots, e_m} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_m \end{pmatrix} = w.$$

$$\underline{A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$$

quindi $F = L_A$.

OSS $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} W$

U, V, W sp. vettoriali

F, G lineari.

$$G \circ F : U \longrightarrow W$$

$G \circ F$ è lineare.

dim

$\ast$ $\quad G \circ F(u_1 + u_2) = G \circ F(u_1) + G \circ F(u_2)$

$\ast\ast$ $\quad G \circ F(\lambda u) = \lambda(G \circ F(u))$

def. di $\circ$.

$$G \circ F\,(u_1 + u_2) = G(F(u_1 + u_2))$$

F è lineare

$$= G(F(u_1) + F(u_2))$$

G è lineare

$$= G(F(u_1)) + G(F(u_2))$$

$$= (G \circ F)(u_1) + (G \circ F)(u_2)$$

#

PROPOSIZIONE

Sia $u_1, \dots u_p$ una base di U.

Sia $v_1, \dots v_n$ " " di V

Sia $w_1 \quad w_m$ " " di W.

$F : U \longrightarrow V$ lineare

$G : V \longrightarrow W$ lineare

$$[G \circ F]^{\underline{u}}_{\underline{w}} = [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [F]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$$

dim. L'iesima colonna di $\left([G \circ F]^{\underline{u}}_{\underline{w}} \right)$

$$\left[G \circ F(u_i) \right]_{\underline{w}} = \left[G \left(F(u_i) \right) \right]_{\underline{w}} =$$

$v = F(u_i)$

$$= [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot \left[F(u_i) \right]_{\underline{v}}$$

$$\boxed{[G(v)]_{\underline{w}} = [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [v]_{\underline{v}}}$$

$$= [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot \text{i-esima colonna di } [F]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$$

$$= \text{i-esima colonna } [G]^{\underline{v}}_{\underline{w}} \cdot [F]^{\underline{u}}_{\underline{v}}$$

#

ESERCIZIO 8.6.

$$W = \{ \underline{x} \in \mathbb{C}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \}$$

Trovare 3-sottospazi $\neq 0$ X, Y, Z di W

$$X \oplus Y \oplus Z = W.$$

$$W = \{ x : \quad x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 \}.$$

Per trovare una base di W

$x_2 = 1 \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -2 \quad w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 1 \quad x_2 = x_4 = x_5 = 0 \quad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = 1 \quad x_2 = x_3 = x_5 = 0 \quad w_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_5 = 1 \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad w_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim W = 4$ e $\underline{w_1}\ \underline{w_2}\ \underline{w_3}\ \underline{w_4}$ è una base

$X = \langle w_1 \ w_2 \rangle \cdot \ w_1, w_2$ è base di X

$Y = \langle w_3 \rangle \cdot \ w_3$ di Y

$Z = \langle w_4 \rangle \cdot \ w_4$ di Z

poiché $w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4$ base di W

quindi $W = X \oplus Y \oplus Z$.

Esercizio 8.5

$$V = Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$$

$$S = \{ X \in Mat_{n\times n} : X^t = X \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$$A = \{ X \in Mat_{n\times n} : X^t = -X \}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = A \oplus S$$

S e A sono sottospazi di V

S: · $0 \in S$ $\quad 0^t = 0$

· $X, Y \in S$ cioè $\underline{X^t = X}$ e $\underline{Y^t = Y}$

allora

$$(X+Y)^t = X^t + Y^t = X + Y$$

e quindi $X + Y \in S$.

• Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $X \in S$ cioè $X^t = X$
allora $(\lambda X)^t = \lambda X^t = \lambda X$

• $V = A \oplus S$ $A \cap S = 0$
$A + S = V$.

$A \cap S = 0$
$X \in A \cap S$ $X^t = -X$ $X \in A$
$X^t = X$ $X \in S$
quindi $X = -X$ ovvero $2X = 0$
da cui $X = 0$.

$V = A + S$.

Se $Y \in Mat_{n \times n}$ cerco $X \in A$ e $Z \in S$
tali che

• $Y = X + Z$. ←
$Y^t = X^t + Z^t = -X + Z$

$$\begin{cases} Y = X + Z \\ Y^t = -X + Z \end{cases}$$

le sommo $2Z = Y + Y^t$ $Z = \dfrac{Y + Y^t}{2}$

se ne faccio la diff. $2X = Y - Y^t$ $X = \dfrac{Y - Y^t}{2}$

Data Y pongo

$$X = \frac{Y - Y^t}{2} \qquad Z = \frac{Y + Y^t}{2}$$

<u>$X \in A$</u>

$$X^t = \left(\frac{Y - Y^t}{2}\right)^t$$

$$= \frac{1}{2}\left(Y^t - (Y^t)^t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Y^t - Y\right) = -X$$

<u>$Z \in S$</u>

$$Z^t = \left(\frac{Y + Y^t}{2}\right)^t$$

$$= \frac{1}{2}\left(Y^t + (Y^t)^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(Y^t + Y\right) = Z$$

$$X + Z = \frac{Y - \cancel{Y^t}}{2} + \frac{Y + \cancel{Y^t}}{2} = Y$$

#