TRACCIA E TRASPOSTA

SE A È $n \times n$ LA TRACCIA DI A È LA SOMMA DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE

$$Tr \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

- $Tr(A + B) = Tr\, A + Tr\, B$
- $Tr(\lambda A) = \lambda\, Tr(A)$
- $\boxed{Tr(A \cdot B) = Tr(\underline{B} \cdot A)}$

A è $n \times m$

B è $m \times n$

$A \cdot B = n \times n$

$B \cdot A = m \times m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \qquad Tr(A \cdot B) = 17$$

$$Tr(B \cdot A) = Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 15 \end{pmatrix} \right] = 17$$

SE A È UNA MATRICE $m \times n$ LA TRASPOSTA DI A, CHE SI INDICA CON A^t, È LA MATRICE $n \times m$ OTTENUTA SCABIANDO RIGHE CON COLONNE.

$$A = \boxed{\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- $\underline{(A \cdot B)^t} = \underline{B^t \cdot A^t}$ $\qquad \underline{A^t \cdot B^t}$

Se A è 2×3 e B è 3×4

$A \cdot B$ è 2×4 e $(A \cdot B)^t$ è 4×2

A^t è $3 \times \underline{2}$ e B^t è $\underline{4} \times 3$

$A^t \cdot B^t$ NON HA SENSO

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ HA SENSO ED È 4×2

AGGIUNGO QUI LA DIMOSTRAZIONE CHE

1) SE A È $m \times n$ E B È $n \times m$ ALLORA

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

2) Se A è $m \times n$ e B è $n \times p$ ALLORA

$$(AB)^t = B^t A^t$$

dim

1) Sia A la matrice con entrate a_{ij}
   " B " " " " b_{ij}

$$C = A \cdot B \qquad D = B \cdot A$$

$$c_{ii} = A^{(i)} B_{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

quindi $$Tr(C) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

$$d_{jj} = B^{(j)} A_{(j)} = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij}$$

quindi $$Tr(D) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij}$$

e quindi $$Tr(C) = Tr(D)$$

2) Sia $C = AB$. $E = C^t$

quindi $$c_{ij} = A^{(i)} B_{(j)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$$

quindi l'entra uv di C^t è uguale all'entrata vu di C E QUINDI È

$$e_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{vk} b_{ku}$$

ora calcoliamo l'entrata uv della matrice $B^t A^t = D$

$$d_{uv} = (B^t)^{(u)} (A^t)_{(v)}$$

ora la riga u-esima di B^t è uguale alla colonna u-esima di B messa in verticale, cioè

$$(B^t)^{(u)} = (B_{(u)})^t$$

e similmente $(A^t)_{(v)} = (A^{(v)})^t$. Allora

$$d_{uv} = \begin{pmatrix} b_{1u} & \cdots & b_{nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1v} \\ \vdots \\ a_{nv} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ku} a_{vk} = e_{uv}$$

E QUINDI $E = D$ #

INVERSA DI UNA MATRICE

IL PROBLEMA: DATA A CERCO B:

$$A \cdot B = Id.$$

IN REALTÀ HO DUE PROBLEMI

- INVERSA SINISTRA: CIOÈ TROVARE B:
  $$B \cdot A = Id.$$
- INVERSA DESTRA: CIOÈ TROVARE C:
  $$A \cdot C = Id.$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3$$

- A NON HA UNA INV. SINISTRA.

$$B \cdot A = Id \qquad A \ \ 2\times 3$$

$$B \ \ n \times 2$$

$$B \cdot A \quad n \times 3$$

CERCO $B = 3 \times 2$ $\qquad B \cdot A = I_3$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- A HA TANTE INVERSE DESTRE

$$A \cdot C = I$$

A È UNA MATRICE 2×3

C È $3 \times m$ $\qquad$ $A \cdot C$ È $2 \times m$

QUINDI È $m = 2$ $\qquad$ C È 3×2

$$A \cdot C = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & \boxed{b+d} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$c = 0 \qquad d = 1 \qquad b + d = 0 \qquad b = -1$

$a + c = 1 \qquad a = 1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ e & f \end{pmatrix}$$

MATRICI CHE HANNO SIA INV. DESTRA CHE SINISTRA A $m \times n$

$$B \cdot A = I_n \qquad B \ n \times m$$

$$A \cdot C = I_m \qquad C \ n \times m$$

ALLORA $B = C$.

DIM. $B \cdot A = I_n$

$$B = B \cdot I = B \cdot \underline{A \cdot C} = I \cdot C = C$$

#

NOTA. VEDREMO IN SEGUITO CHE IN QUESTO CASO $n = m$ E CHE SE A È UNA MATRICE $n \times n$ ALLORA A HA INVERSA DESTRA SE E SOLO SE HA INVERSA SINISTRA.

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

- CAPIRE QUANDO IL SISTEMA HA SOLUZ.
- TROVARE UN MODO DI DESCRIVERE LE SOLUZ.
  E CAPIRE "QUANTE" SONO.

IL SISTEMA GENERALE NELLE VARIAB. $x_1 \dots x_n$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

LE a_{ij} E LE b_i SONO COSTANTI.

PONGO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & \\ & \dots & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L'EQUAZIONE DI PRIMA SI PUÒ RISCRIVERE

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot x_1 + x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

OSSERVAZIONE $Ax = b$ UN SISTEMA LIN.

1) SE A HA UNA INVERSA SINISTRA, ALLORA LA SOLUZIONE, SE ESISTE È UNICA.

2) SE A HA UNA INVERSA DESTRA IL SISTEMA HA SOLUZIONE PER OGNI b.

DIM

A È $m \times n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \end{pmatrix}$

1) SIA B: $B \cdot A = I_n$

$$Ax = b \Rightarrow \underbrace{BA}x = B \cdot b$$
$$\boxed{x = B \cdot b.}$$

2) SIA C $\quad A \cdot C = I_m$

SE PONGO $x = C \cdot b$ ALLORA

$$Ax = ACb = I \cdot b = b$$

#

NOTA BENE NEL 1° CASO NON È DETTO CHE $x = Bb$ SIA UNA SOLUZIONE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QUESTO SISTEMA NON HA SOLUZIONE!

$$Bb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE A, A' sono $m \times n$

b, b' sono $m \times 1$ $\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

$$Ax = b \quad \text{e} \quad A'x = b'$$

LI DICO EQUIVALENTI SE HANNO LE STESSE SOLUZIONI

MOSSE CHE TRASFORMANO UN SISTEMA IN UNO EQUIVALENTE

1° R_{ij} SCAMBIARE L'EQUAZIONE i-ESIMA CON LA j-ESIMA

2° $R_i(\alpha)$ $\alpha \in K$ $\alpha \neq 0$.

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 3 \qquad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6$$

MOLTIPLICARE L'EQUAZIONE i-ESIMA PER IL NUMERO α.

3° $R_{ij}(\alpha)$ $i \neq j$ $\alpha \in K$

$$\begin{array}{lll} i & x_1 + x_2 + x_3 = 1 & x_1 + (1+\alpha)x_2 + (1+2\alpha)x_3 = 1+2\alpha \\ j & \underline{x_2 + 2x_3 = 2} \quad \cdot\, \alpha & \alpha x_2 + 2\alpha x_3 = 2\alpha \end{array}$$

SOSTITUIRE L'EQUAZIONE i-ESIMA CON L'EQUAZIONE OTTENUTA SOMMANDO ALL'EQUAZIONE i-ESIMA LA j-ESIMA MOLTIPLICATA PER α.

OSSERVAZIONE

1) SE X RISOLVE IL SISTEMA ALLORA X RISOLVE ANCHE IL SISTEMA TRASFORMATO CON

UNA DI QUESTE TRE ROSSE.

2) È VERO ANCHE IL VICEVERA.

INFATTI

$$\text{SISTEMA} \xrightarrow{R_{ij}(\alpha)} \text{SISTEMA NUOVO} \xrightarrow{R_{ij}(-\alpha)} \text{SISTEMA DI PARTENZA}$$

$\bar{i}$-esima $+\alpha \cdot j$-esima $- \alpha$ j-esima $=$ i-esima.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$\downarrow R_{12}(-1)$

$$\begin{cases} 3x_1 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$\downarrow R_1\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$\downarrow R_{31}(-1)$

$$\begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$x_3 = 3 - 2/3 = 7/3$$

$$\Big\downarrow R_{23}(-1)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = -1 - 7/3 = -10/3 \\ x_3 = 7/3 \end{cases}$$

PER COMODITÀ IN FUTURO SCRIVEREMO

SOLO LE MATRICI $\underbrace{(A \; b)}$

CHE SI CHIAMANO LE MATRICI

COMPLETE ASSOCIATE AL SISTEMA.

MATRICI A SCALINI E MATRICI A SCALINI IN FORMA FORTE

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE SI DICE A SCALINI SE LA PRIMA ENTRATA $\neq 0$ DI OGNI RIGA È PIÙ A DESTRA DI QUELLA DELLA PRECEDENTE RIGA

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

NON È A SCALINI

- IN UNA MATRICE A SCALINI LE PRIME ENTRATE $\neq 0$ DI OGNI RIGA SI CHIAMANO I PIVOT E IL NUMERO DI RIGHE $\neq 0$ SI CHIAMA IL RANGO DELLA MATRICE

- UNA MATRICE A SCALINI SI DICE A SCALINI IN FORMA FORTE SE LE ENTRATE DEI PIVOT SONO TUTTE UGUALI A 1 E LE ENTRATE SOPRA I PIVOT SONO UGUALI A 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONI DI UN SISTEMA A SCALINI

$$Ax = b$$

CON A A SCALINI IN FORMA FORTE.

$$A \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 3 \\ 0 = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2\underline{\underline{x_3}} \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 3 \\ 0 = \underline{\underline{d}} \end{cases}$$

$d = 0$

$\underline{X_1} \quad \underline{X_3}$

SIA r = rango A

I° IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

II° SE b È DELLA FORMA

ALLORA ESISTE UNA MATRICE C $r \times (n-r)$ E UN VETTORE d $r \times 1$ TALI CHE LE SOLUZIONI SONO LE x DELLA FORMA

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_{n-2} \end{pmatrix} + d$$

DOVE LE y_i SONO LE VARIABILI CORRISPONDENTI AI PIVOT E LE z_i LE RIMANENTI.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ b_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= 1 - 2x_3 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= 3 \\ \boxed{b_4 = 0} \end{aligned} \right.$$

$r = 3$

$x_2 \quad x_4 \quad x_5 \qquad x_1 \quad x_3$

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \qquad z_1 \quad z_3$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$