$F: V \longrightarrow W \qquad F(v+u) = F(v) + F(u)$

$F(\lambda v) = \lambda F(v)$ •

PROP.

$F(0_V) = 0_W$

dim

$$F(0_V) = F(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot F(0_V) = 0_W \quad \#$$

DEFINIZIONE

$F: V \longrightarrow W$ Lineare

$N(F)$ = il nucleo di F = $\ker F$

$= \{ v \in V : \underline{F(v) = 0_W} \} \subset V$

$\mathrm{Im}\, F$ = immagine di F

$= \{ w \in W : \exists\, v \in V$ e $F(v) = w \} \subset W$

PROPOSIZIONE $\quad F: V \longrightarrow W$ LINEARE

ALLORA $\quad N(F)$ È UN SOTTOSP. VETT. DI V

$\mathrm{Im}(F)$ È ... . ———— DI W

dim

$N(F)$ • $0_V \in N(F)$ PROP. PREC.

• Se $u, v \in N(F)$ allora $\underline{u+v \in N(F)}$

$$F(u+v) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ È LIN.}}}{=} F(u)+F(v) \underset{\substack{\uparrow \\ u,v \in N(F)}}{=} 0_W + 0_W = 0_W$$

quindi $u+v \in N(F)$

- Se $\lambda \in K$ e $u \in N(F)$ allora $\lambda u \in N(F)$

$$F(\lambda u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LIN. DI } F}}{=} \lambda F(u) \underset{\substack{\uparrow \\ u \in N}}{=} \lambda \cdot 0_W = 0_W$$

quindi $\lambda u \in N(F)$.

$\operatorname{Im} F$

- $0_W \in \operatorname{Im} F$ infatti $0_W = F(0_V)$

- Se $\underline{w_1}, w_2 \in \underline{\operatorname{Im}} F$ $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} F$

$\exists\, v_1 \in V$ e $w_1 = F(v_1)$ $(w_1 \in \operatorname{Im} F)$

$\exists\, v_2 \in V$ e $w_2 = F(v_2)$ $(w_2 \in \operatorname{Im} F)$

$$\underline{w_1 + w_2} = F(v_1) + F(v_2) = F(\underline{v_1 + v_2})$$

quindi $w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} F$.

- Se $w \in \operatorname{Im} F$ e $\lambda \in K$ allora $\lambda w \in \operatorname{Im} F$

#

Esempio $\quad V = K^n \qquad W = K^m$

$A \quad m \times n$

$L_A : \underline{\underline{K^n}} \longrightarrow K^m \qquad L_A(x) = A \cdot x$

$$N(L_A) = \{ x \in K^n : L_A(x) = 0 \}$$

$$= \{ x \in K^n : \underline{A \cdot x = 0} \}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad v_i \in K^m$$

$$\text{Im } L_A = \{ L_A(x) : x \in K^n \} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$L_A(x) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n}$$

$$\text{Im } L_A = \{ x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n : x_i \in K \}$$

$$= \langle v_1 , \dots , v_n \rangle$$

$F = L_A$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE $\quad \dim_K V < +\infty$

$F : V \longrightarrow W$ K-LINEARE

$$\dim V = \dim \underline{N(F)} + \dim Im(F)$$

<u>dim</u>

Sia $v_1 \dots v_a$ una base di $N(F) \subset V$

$\dim N(F) = a$.

Sia $\underline{v_1 \dots v_a \; u_1 \dots u_b}$ una base di V

$\dim V = a + b$

$\underline{Im\, F} = \{ F(v) : v \in V \}$ $\quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_a v_a + \beta_1 u_1 + \beta_b u_b$

$= \{ F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_a v_a + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_b u_b) :$

$\alpha_i, \beta_i \in K \}$

$$F(\alpha_1 v_1 + \dots + \beta_b u_b) = F(\alpha_1 v_1) + F(\alpha_2 v_2) + \dots + F(\beta_b u_b)$$

$$= \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \dots + \beta_b F(u_b)$$

$$= \overbrace{\alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W + \dots \alpha_a \cdot 0_W}^{0} + \beta_1 F(u_1) + \dots + \beta_b F(u_b)$$

$$= \boxed{\beta_1 F(u_1) + \dots + \beta_b F(u_b)}$$

$$\underline{\operatorname{Im} F} = \{ \beta_1 F(u_1) + \cdots + \beta_b F(u_b) \ : \ \beta_i \in K \}$$
$$= \underline{< \underline{F(u_1)} ; \ldots ; \underline{F(u_b)} >}$$

Se dimostro che $F(u_1) ; \ldots ; F(u_b)$ sono una base di $\operatorname{Im} F$

avrei

$$\dim \operatorname{Im} F = b$$
$$\dim N F = a \qquad \dim V = a + b$$

Devo verificare che $F(u_1) \ldots F(u_b)$ sono L.I.

Supponiamo che $\underline{\beta_1 \boxed{F(u_1)} + \cdots + \beta_b \boxed{F(u_b)}} = 0$

$$F(\underline{\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b}) = 0$$

ovvero $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b \in N(F)$

quindi $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_a v_a$

$$-\alpha_1 v_1 \qquad -\alpha_a v_a + \beta_1 u_1 \qquad + \beta_b u_b = 0_V$$

poiché $v_1 \ldots v_a \; u_1 \; u_b$ sono una base di V

ricavo $\beta_1 = \cdots = \beta_b = 0$ #

OSSERVAZIONE (Nelle dim abbiamo visto).

→ • $F: V \longrightarrow W$ LINEARE

$v_1 \dots v_n$ sono generatori di V

ALLORA $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono generatori di $\operatorname{Im} F$

→ • $F: V \longrightarrow W$ LINEARE $N(F) = 0$

$v_1 \dots v_m$ SONO L.I. ALLORA $F(v_1) \dots F(v_m)$ SONO L.I.

ESEMPIO $L_A : K^n \longrightarrow K^m$

A È UNA MATRICE $m \times n$

$$\longrightarrow \quad N(L_A) = \{ x : \ A \cdot x = 0 \}$$

$$\operatorname{Im}(L_A) = \underline{\underline{\langle v_1 \dots v_n \rangle}}$$

dove $\underline{v_1 \dots v_n}$ sono le colonne di A.

Se prendo A e la riduco a scalini e considero i vettori v_i corrispondenti alle colonne dei pivot. questi sono una base di $\langle v_1 \dots v_n \rangle$

$$\dim \langle v_1 \quad v_n \rangle = \text{rango } A.$$

$$\dim(\mathrm{Im}\, L_A) = \text{rango} A$$

Se $\{x : Ax = 0\}$ una base
si determina nel seguente modo
si individuano le variabili libere e
quelle dipendenti e si costruisce una base
che ha cardinalità il n° delle variabili
libere

$$\dim N(L_A) = n - \text{rango} A$$

$V = K^n$

$$n = \dim N(L_A) + \dim \mathrm{Im}(L_A)$$

PROPOSIZIONE $F : V \to W$ LINEARE

1) F È SURGETTIVA SE E SOLO SE $\mathrm{Im} F = W$.

2) F È INIETTIVA SE E SOLO SE $N(F) = 0$.

dim

1) USA SOLO LA DEF. DI SURG.

2) $\Rightarrow$ $0_V \in N(F)$

Se $v \in V$ e $v \neq 0_V$

$$F(v) \neq F(0_V) = 0_W$$

quindi se $v \neq 0_V$ allora $v \notin N(F)$

$$N(F) = \{0_V\}$$

$\Leftarrow$ voglio far vedere che se $N(F) = 0$ allora F è iniettiva. ovvero SE $v_1, v_2 \in V$ e $\underline{F(v_1) = F(v_2)}$ ALLORA $v_1 = v_2$.

$$F(v_1) = F(v_2) \qquad F(v_1) - F(v_2) = 0$$

$$F(\underbrace{v_1 - v_2}) = 0_W \quad \text{quindi}$$

$$v_1 - v_2 \in N(F) = \{0_V\}$$

quindi $v_1 - v_2 = 0_V$ ovvero $v_1 = v_2$ #

OSSERVAZIONE $\quad F: V \longrightarrow W$

- F SURGETTIVA e $v_1 \dots v_n$ SONO GEN. DI V ALLORA $F(v_1) \dots F(v_n)$ SONO GEN. DI W
- F INIETTIVA e $v_1 \dots v_n$ SONO L.I. ALLORA $F(v_1) \dots F(v_n)$ SONO L.I.
- F BIGETTIVA e $v_1 \dots v_n$ È UNA BASE DI V ALLORA $F(v_1) \dots F(v_n)$ SONO UNA BASE DI W.

$V \qquad v_1 \dots v_n$ base di V

$F : V \longrightarrow \underline{K^n} \qquad F(v) = [v]_{v_1 \dots v_n}$

$V \longleftarrow K^n : G$

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

F è bigettiva

Sia $w_1 \dots w_m$ una base di V

$\boxed{\text{quindi}}$ $F(w_1) \dots F(w_m)$ è una base di K^n

ma in K^n tutte le basi hanno n elementi

e quindi $n = m$.

SOMMA, MOLT. PER SCALARE E COMP. DI APP. LINEARI

$F, G : V \longrightarrow \underline{\underline{W}} \qquad F, G$ Lineari $\lambda \in K$.

- $F + G$ È LINEARE

$$\underline{(F+G)}(v) = F(v) + G(v)$$

- $\lambda \cdot F$ È LINEARE

$$\underline{(\lambda \cdot F)}(v) = \lambda \cdot (F(v))$$

SIA $\boxed{\mathrm{Hom}(V, W)} = \{ F : V \longrightarrow W \quad F \text{ LINEARE} \}$

$\underbrace{}_{}$.
$Lin(V, W)$

$\to$ $H = Hom(V, W)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE CON $+$, $\cdot$ DEFINITI SOPRA.

e 0_H È LA FUNZIONE

$$0_H(v) = 0_W \quad \forall v.$$

$V = K^n \quad W = K^m \quad L_A \quad A \in Mat_{m \times n}$

. Esempio

$$V = K^3 \qquad W = K^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_A : K^3 \longrightarrow K^2 \qquad L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 3y+2z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+x \end{pmatrix} \qquad \text{NO} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot x + \cdot y^2 \\ z + x \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x(ye^{-x}) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\verb|"| \; A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad g(v) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$g(2v) = g\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \neq 2\,g(v)$$

$$h = L_A \qquad A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$V = \mathbb{C}[t]$$

$$F : V \longrightarrow V \qquad \underline{F(p(t)) = (t^2-1)\,p(t)}$$

$$G : V \longrightarrow \mathbb{C}^2 \qquad G(p(t)) = \begin{pmatrix}p(0)\\p(1)\end{pmatrix}$$

$$H : \mathbb{C}^2 \longrightarrow V \qquad H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x(t^2+1) + \\ + y(t^3-1)$$

$$F(t+1) = (t^2-1)(t+1) = t^3+t^2-t-1$$

$$G(t+1) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = t^2+1$$

F, G, H SONO LINEARI.