17 NOVEMBRE

$A$ $m \times n$

- rango $A = m$ $\quad \boxed{Ax = b}$ $\exists$ sol.
- rango $A = n$ $\quad \boxed{Ax = 0}$ unica sol.

LA VOLTA SCORSA ABBIAMO VISTO

$$W = \{ x : Ax = 0 \}$$

$$\boxed{\dim W} = \text{n° delle variabili libere}$$
$$= n - \text{rango}(A)$$

$$\text{rango } A = n - \dim W.$$

---

$U, W \subset V \qquad \dim V < +\infty$

$$\dim (U \cap W) + \dim (U + W) = \dim U + \dim W.$$

$\boxed{U \cap W = 0}$ se e solo se è
$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W.$$

DEFINIZIONE $U$ e $W$ si dicono in somma diretta se $\boxed{U \cap W = 0}$. In questo scriviamo

$$U \oplus W = U + W$$

OSS. $U$ e $W$ sono in somma diretta se e solo se $*$ $\boxed{u + w = 0 \text{ con } u \in U \; w \in W \text{ allora } u = w = 0.}$

dim $\boxed{\Rightarrow}$ $u + w = 0$

$U \ni u = -w \in W$ $\qquad u \in U \cap W = 0$

quindi $u = 0$ e $w = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $u \in U \cap W$ $\qquad -u \in U \cap W$

$$\underset{\substack{\cap \\ U}}{u} - \underset{\substack{\cap \\ W}}{u} = 0 \quad \text{quindi} \quad u = 0$$

#

OSS. $U$ e $W$ sono in somma diretta se e solo se $\boxed{u_1 \dots u_a \text{ è una base di } U \cdot \; w_1 \dots w_b \text{ è una base di } W \cdot \text{ allora } u_1 \dots u_a \, w_1 \dots w_b \text{ sono una base di } U + W.}$

dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\langle u_1 \dots u_a, w_1 \; w_b \rangle = U + W$

$\dim U + W = a + b$

quindi $u_1 \dots u_a \, w_1 \dots w_b$ sono una base

$\boxed{\Leftarrow}$ $\dim(U + W) = a + b = \dim U + \dim W$

quindi $\dim(U \cap W) = 0$

e quindi $U \cap W = 0$ #

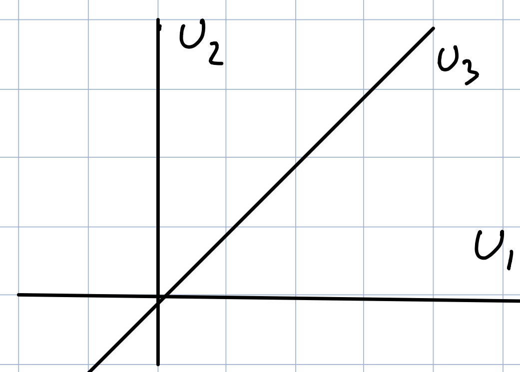
## DEFINIZIONE

$U_1; \dots; U_k$ sottospazi di $W$
diciamo che $U_1 \dots U_k$ sono in somma diretta
se $\left| \begin{array}{l} u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0 \quad \text{con } u_i \in U_i \\ \text{allora } \quad u_i = 0 \end{array} \right.$

**Esempio** $\quad V = \mathbb{R}^2$

$U_1 = \langle e_1 \rangle \qquad U_2 = \langle e_2 \rangle \qquad U_3 = \langle e_1 + e_2 \rangle$

$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2 \supset U_3$




$U_1 \ni u_1 = e_1 \qquad u_2 = e_2 \in U_2$
$u_3 = -e_1 - e_2 \in U_3$
$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$

NON SONO IN SOMMA DIRETTA MA
$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = 0.$

## PROPOSIZIONE $\quad V \quad \dim V < +\infty$

$U_1 \dots U_k$ sottospazi di $V$

$u_{11} \dots\dots u_{1d_1}$ base di $U_1$
$\vdots$

$u_{h1} \dots u_{h d_h}$ base di $U_h$

SONO EQUIVALENTI

1) $U_1 \dots U_h$ SONO IN SOMMA DIRETTA

2) $\dim(U_1 + U_2 + \dots + U_h) = \dim U_1 + \dots + \dim U_h$

3) $u_{11} \dots u_{1d_1}\ u_{21}\ u_{22} \dots u_{2d_2} \dots u_{hd_h}$
È UNA BASE DI $U_1 + \dots + U_h$

4) ogni vettore di $U_1 + \dots + U_h$ si scrive in modo unico come $\underline{u_1 + \dots + u_h}$ con $u_i \in U_i$.

dim

$1 \Rightarrow 4$ $\quad U_1 + \dots + U_h = \{ u_1 + \dots + u_h : u_i \in U_i \}$

quindi ogni elemento di $U_1 + \dots + U_h$ si scrive $u_1 + \dots + u_h$ devo verificare l'unicità

$$u_1 + \dots + u_h = v_1 + \dots + v_h$$

con $u_i, v_i \in U_i$ e dimostro $\underline{u_i = v_i}$

$$\underbrace{(u_1 - v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 - v_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_h - v_h)}_{\in U_h} = 0$$

da cui $u_i - v_i = 0$ ovvero $u_i = v_i$

$4 \Rightarrow 1$ $\quad u_1 + \dots + u_h = 0$ con $u_i \in U_i$

$$\underline{u_1 + \dots + u_h} = \underset{\in U_1}{0} + \underset{\in U_2}{0} + \dots + \underset{\in U_h}{0}$$

da cui per l'unicità $u_i = 0$.

$1 \Rightarrow 3$ $\quad u_{11} \dots u_{1d_1}$

$u_{h1} \dots u_{hd_h}$

$$U_1 + \dots + U_h = \langle \overbrace{u_{11} \dots\dots\dots u_{hd_h}} \rangle$$

è sempre vero.

DIMOSTRIAMO CHE SONO LIN. INDIP.

$$\underbrace{\alpha_{11} u_{11} + \alpha_{12} u_{12} + \dots \alpha_{1d_1} u_{1d_1}}_{v_1} + \underbrace{\alpha_{21} u_{21} + \dots + \alpha_{2d_2} u_{2d_2}}_{v_2}$$

$$+ \dots + \underbrace{\alpha_{h1} u_{h1} + \dots + \alpha_{hd_h} u_{hd_h}}_{} = 0$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_h = 0.$$

osservo che $v_1 \in U_1$ $v_2 \in U_2$ $\dots$ $v_h \in U_h$

quindi $v_i = 0$

$$v_1 = \alpha_{11} u_{11} + \dots + \alpha_{1d_1} u_{1d_1} = 0.$$

da cui $\alpha_{1i} = 0$

e similmente $\alpha_{2i} = \alpha_{3i} = \ \ = \alpha_{hi} = 0.$

$\boxed{3 \Rightarrow 1 \quad | \quad 2 \Leftrightarrow 3}$ LI LASCIAMO

PER ESERCIZIO.

**DEFINIZIONE** $U_1 \dots U_h$ sono sottospazi di $V$ allora $V$ si dice la somma diretta di $U_1, U_2, \dots, U_h$ se

$U_1, \dots U_h$ sono in somma diretta

e se $U_1 + \dots + U_h = V$.

E inoltre se $U_1 \dots U_h$ sono in somma diretta indichiamo la loro somma:

$$U_1 \oplus \dots \oplus U_h = U_1 + \dots + U_h$$

**OSSERVAZIONE**

Se $U_i = \langle u_i \rangle$ $u_i \neq 0$

1) $U_1 \dots U_h$ sono in somma diretta se e solo se gli sono L. I.

2) $U_1 \oplus \dots \oplus U_h = V$ se e solo se $u_1 \dots u_h$ sono una base di $V$.

Esercizio 7.2 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ $x_i \neq x_j$

$$V = \mathcal{F}_K(X) = \{ f : X \longrightarrow K \}$$

$V$ è un $K$-spazio vettoriale

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

$\delta_1 \dots \delta_n \in V$

$$\delta_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

$\delta_1, \dots, \delta_n$ È UNA BASE DI $V$.

DEVO FAR VEDERE CHE SE $f \in V$ ALLORA $\exists_1$ $a_1, \dots, a_n \in K$ tali che

$$f = \boxed{a_1 \delta_1 + \dots + a_n \delta_n}$$

unicità $K \ni f(x_i) = (a_1 \delta_1 + \dots + a_n \delta_n)(x_i)$

$$= a_1 \delta_1(x_i) + a_2 \delta_2(x_i) + \dots + a_n \delta_n(x_i)$$

$= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_i \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 0$
$= a_i$

$a_i = f(x_i)$

<u>esistenza</u> Se $f \in V$ verifico che

$$f = \underbrace{f(x_1)\delta_1 + \dots + f(x_n)\delta_n}_{= g}$$

Per far vedere che $f = g$, faccio vedere che $f(x_i) = g(x_i)$ per ogni $i$.

$$\begin{aligned} g(x_i) &= \left(f(x_1)\delta_1 + \dots + f(x_n)\delta_n\right)(x_i) \\ &= f(x_1)\delta_1(x_i) + \dots + f(x_n)\delta_n(x_i) \\ &= f(x_i) \end{aligned}$$

#

---

# APPLICAZIONI LINEARI

## DEFINIZIONE

$V$ e $W$ due $K$-spazi vettoriali. $F: V \longrightarrow W$
Si dice $F$ è $K$-lineare o lineare se

- $\forall u, v \in V \quad F(u+v) = F(u) + F(v)$
- $\forall u \in V\ \forall \lambda \in K \quad F(\lambda u) = \lambda F(u)$

# ESEMPIO 1 $\quad V = K^n \quad W = K^m$

$A$ matrice $m \times n$

$$L_A : K^n = V \longrightarrow K^m = W$$

$$L_A(x) = A \cdot x$$

· esempio $\quad n = 2 \quad m = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$L_A : K^2 \longrightarrow K^3$$

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

$L_A$ è una applicazione lineare

$$L_A(x+y) = A \cdot (x+y) =$$
$$= A \cdot x + A \cdot y = L_A(x) + L_A(y)$$

$$L_A(\lambda x) = A \cdot (\lambda x) = \lambda (A \cdot x)$$
$$= \lambda \, L_A(x)$$

ESEMPIO 2 $V$ un $K$-spazio vettoriale
$v_1 \dots v_n$ base di $V$.

$$F : V \longrightarrow K^n \qquad F(v) = [v]_{v_1 \dots v_n}$$

$F$ è lineare

$F(v+u)$

$$\boxed{v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n} \qquad [v]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \qquad [u]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$v + u = (a_1+b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n$$

$$[v+u]_{v_1 \dots v_n} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

- $$F(v+u) = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix} = F(v) + F(u)$$

$$\lambda v = \lambda a_1 v_1 + \dots + \lambda a_n v_n$$

$$[\lambda v]_{v_1 - v_n} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

$$F(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda F(v)$$

$V$ sp. vett. $v_1 \dots v_n$ una base

$$G : K^n \longrightarrow V$$

$$G \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$G$ è lineare (es.)