$F : V \longrightarrow V$

$$P_F(t) = \underline{(-1)^n}\, t^n + \underline{(-1)^{n+1}\, \mathrm{Tr}(F)}\, t^{n-1} + \dots + \underline{\mathrm{Det}(F)}$$

$n = \dim V$

DEFINIZIONE

$F : V \longrightarrow V$ $\quad v_1 \dots v_n$ una base

$$[F]^{v_1 \dots v_n}_{v_1 \dots v_n} = A = (a_{ij})$$

$$\mathrm{Tr}\, F = \mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$\mathrm{Tr}\, F$ non dipende dalla base.

$$[F]^{w_1 \dots w_n}_{w_1 \dots w_n} = B \qquad \mathrm{Tr}(\underline{B}) = \mathrm{Tr}(\underline{A})$$

$$B = G \cdot A \cdot G^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(B) &= \mathrm{Tr}((G \cdot A)\, G^{-1}) = \\ &= \mathrm{Tr}(\cancel{G^{-1}} \cdot \cancel{G} \cdot A) \\ &= \mathrm{Tr}(A). \end{aligned}$$

$$P_F(t) = \underline{(-1)^n\, t^n} + \underline{(-1)^{n-1}\, \mathrm{Tr}(F)\, t^{n-1}} + \dots$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}\,\boxed{\mathrm{Det}\,(A_{11})} - a_{12}\,\mathrm{Det}\,A_{12} + a_{13}\,\mathrm{Det}\,A_{13}$$

$$- a_{14}\,\mathrm{Det}(A_{14})$$

$$= a_{11}\left(a_{22}\,\mathrm{Det}\,B - a_{23}\,\mathrm{Det}\,C + a_{24}\,\mathrm{Det}\,D\right)$$

...

OGNI ADDENDO SARÀ UN PRODOTTO

$$\boxed{\pm\, a_{1i_1}\, a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}} \qquad \boxed{n!}$$

CON i_h DIVERSI TRA DI LORO.

UNO DI QUESTI ADDENDI

$$\boxed{a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot \cdots \cdot a_{nn}.}$$

$$\operatorname{Det} A = a_{11} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + \dots$$

TORNIAMO AL CALCOLO DEL POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-t \end{pmatrix}$$

TRA GLI ADDENDI OTTENGO

$$(a_{11}-t)\cdot(a_{22}-t)\cdot(a_{33}-t)(a_{44}-t) =$$

$$= (-1)^4 t^4 + (-1)^3 t^3 (a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}) + \dots$$

$$(-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \operatorname{Tr}(A) + \dots$$

TUTTI GLI ALTRI TERMINI CHE COMPAIONO NEL CALCOLO DI DET A HA GRADO IN t MINORE O UGUALE A 2 NEL CASO DI UNA MATRICE 4x4

E $n=2$ NEL CASO GENERALE.

$F: V \to V$

$\lambda \qquad mg_\lambda(F) = \dim N(F - \lambda \, Id_V)$

$ma_\lambda(F) =$ molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico.

- F è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$
  $mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_n} = \dim V$

  dove $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono gli autovalori

- λ è un autovalore se e solo se $mg_\lambda > 0$

- λ è un autovalore se e solo se $ma_\lambda > 0$.

- in genere $mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_n} \leq \dim V$

  $ma_{\lambda_1} + \dots + ma_{\lambda_n} \leq \dim V$

PROPOSIZIONE

$$mg_\lambda(F) \leq ma_\lambda(F)$$

dim

$mg_\lambda(F) = 2$ e dimostriamo $ma_\lambda(F)$

(il caso generale si fa nello stesso modo).

$\dim \underline{N(F-\lambda Id)} = 2$ $\quad v_1, v_2$ base

di $N(F-\lambda I)$

lo completiamo $v_1 \; v_2 \; v_3 \ldots v_n$

- $F(v_1) = \lambda v_1 + 0 v_2 + 0 v_3$
  $F(v_2) = \lambda v_2$

$$[F]^{v_1 \ldots v_n}_{v_1 \ldots v_n} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & \\ \hline \vdots & 0 & \cancel{X} \\ \vdots & \vdots & B \\ 0 & 0 & \end{array}\right) = A$$

$$P_F(t) = \mathrm{Det}(A - tI) =$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda-t & 0 & \\ 0 & \lambda-t & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & B-t\,Id \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\underline{(\lambda-t)(\lambda-t)}\;\mathrm{Det}(B-t\,Id) = p_F(t)$$

quindi $me_\lambda \geq 2$.

#

TEOREMA $\quad F: V \longrightarrow V \quad \dim V = N$

CASO $K = \mathbb{C}$

F È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE PER OGNI λ $\quad me_\lambda(F) = mg_\lambda(F)$

CASO K GENERALE $\quad (K = \mathbb{R} \quad K = \mathbb{Q}.)$

F È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE $\quad$ 1) LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO SONO IN K.

2) $\forall \lambda \quad me_\lambda(F) = mg_\lambda(F)$.

ESEMPIO DEL 2° CASO

$K = \mathbb{R} \quad V = \mathbb{R}^2 \quad F = L_A \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_A(t) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1.$

QUESTO POLINOMIO HA DELLE RADICI IN $\mathbb{C}$ CHE NON SONO IN $\mathbb{R}$. i È UNA RADICE

DIMOSTRAZIONE

$P_F(t)$ È UN POLINOMIO DI GRADO N $\dim V$.

È A COEFFICIENTI IN $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

IN OGNI CASO È UN POLINOMIO A COEFFICIENTI IN $\mathbb{C}$.

$$P_F(t) = e\,\underline{\underline{(t-\lambda_1)^{m_1}}} \cdots\cdots \underline{\underline{(t-\lambda_n)^{m_n}}}$$

CON $e \neq 0$. $e \in \mathbb{C}$. λ_i DISTINTI.

$\boxed{K = \mathbb{C}}$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI DI

$F.$ $\quad me_{\lambda_i} = m_i$

$$\underline{me_{\lambda_1} + \dots + me_{\lambda_n} = m_1 + \dots + m_n} = \dim V = N$$

$$mg_{\lambda_i} = me_{\lambda_i}$$

$$mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_n} = \dim V$$

E QUINDI F È DIAGONALIZZABILE.

$\boxed{\text{SE } K = \mathbb{R} \text{ o } K = \mathbb{Q}}$

OSSERVO CHE λ_i È UN AUTOVALORE SOLO SE $\underline{\lambda_i \in K}$. E PER IPOTESI TUTTI GLI AUTOVALORI SONO IN K.

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI

E $\quad mg_{\lambda_i} = me_{\lambda_i}$.

$$mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_n} = \dim V.$$

$\Rightarrow$ F È DIAGONALIZZABILE.

#

VICEVERSA SE F È DIAGONALIZZABILE

E $\lambda_1 \dots \lambda_m$ SONO GLI AUTOVALORI.

$$\begin{array}{ccccc} mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_n} & = & \dim V. \\ \wedge \quad \| & & \| \\ me_{\lambda_1} + \dots + me_{\lambda_n} & \leq & \dim V. \end{array}$$

QUINDI

$$me_{\lambda_i} = mg_{\lambda_i}$$

$$\underline{me_{\lambda_1} + \dots + me_{\lambda_n}} = \boxed{\dim V.}$$

QUINDI $\lambda_1 \dots \lambda_n$ SONO TUTTE LE RADICI DI $p_F(t)$ E IN PARTICOLARE LE RADICI DI $p_F(t)$ SONO IN K.

#

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

CALCOLO DI AUTOVALORI E MOLT. ALGEBRICHE

$$P_A(t) = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} =$$

$$= (3-t)^3 = -(t-3)^{3}$$

C'È UN UNICO AUTOVALORE 3.

$$me_3 = 3.$$

CALCOLO DELLA MOLTEPLICITÀ GEOM.

$$\dim N(\underline{\underline{L_A - 3\,Id}})$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\underline{x})$

NUCLEO $(\mathcal{Z})$: . .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\text{Nucleo} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim N = 1$$

$$mg_3 = 1 \neq 3. = me_3$$

UN ALTRO MODO PER CALCOLARE

$\dim N$ È RICORDARE CHE

$$\dim N = \underset{\underset{\dim V}{\parallel}}{n} - \dim Im = n - \text{rango}$$

$$B \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_B(t) = -(t-3)^2(t-2)$$

HO 2 AUTOVALORI

$\bullet \quad 2 \qquad me = 1 \quad \Rightarrow \quad mg = 1.$

$\times \quad 3 \qquad me = 2$

$$\dim N \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - \text{rango} = 1.$$

$$\underset{B - 3I.}{\parallel}$$

e $mg_\lambda = 1$.

$$C \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_C(t) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 2 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= -(t-3)(t-2)(t-1)$$

HA 3 RADICI DISTINTE

$3 \qquad me = 1 \quad \Rightarrow \quad mg = 1$

$2 \qquad me = 1 \quad \Rightarrow \quad mg = 1$

$1 \qquad me = 1 \quad \Rightarrow \quad mg = 1$

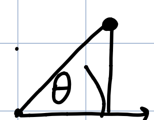
È DIAGONALIZZABILE.

ESERCIZIO

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

LA ROTAZIONE DI ANGOLO θ.

PER QUALI VALORI DI θ È DIAGON.?



$$[R_\theta]^{e_1 \ e_2}_{e_1 \ e_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$p(t) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{pmatrix} =$$

$$= t^2 - 2\cos\theta \ t + 1$$

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 \geq 0$$

$$\cos^2\theta \geq 1. \qquad \theta = 0 \quad \theta = \pi.$$

$\theta \neq 0, \pi$ ALLORA IL POLINOMIO CARATT. NON HA RADICI IN $\mathbb{R}$ E QUINDI R_θ NON È DIAGONALIZZ.

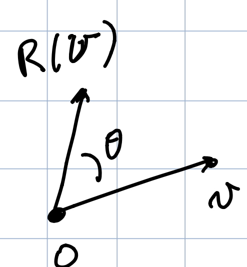
$\theta = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{È DIAG.}$$

$\theta = \pi$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{È DIAG.}$$

R_θ È UNA ROTAZIONE.



OSSERVO CHE PER $\theta \neq 0, \pi$

0, v, $R(v)$ NON SONO ALLINEATI

QUINDI PER $\theta \neq 0, \pi$ R NON HA AUTOVETTORI E QUINDI NON È DIAGON.

$$\left.\begin{array}{ll} \theta = 0 & R = Id \\ \theta = \pi & R = -Id \end{array}\right\} \text{CHE SONO DIAGON.}$$