DEFINIZIONE

$F : V \longrightarrow V$ $\quad \mathbb{K}$-LINEARE $\quad \lambda \in \mathbb{K}$

L'AUTOSPAZIO DI F RELATIVO A λ

$$V_\lambda(F) = \{ v \in V \text{ tali che } Fv = \lambda v \}$$

$$= N(F - \lambda \mathrm{Id}_V)$$

$V_\lambda(F)$ È UN SOTTOSPAZIO DI V

$$\dim_{\mathbb{K}} V_\lambda(F) = mg_\lambda(F)$$

SI CHIAMA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

OSSERVAZIONE

λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE

$\underline{mg_\lambda(F) > 0}$ OVVERO $V_\lambda(F) \neq 0$.

DIM.

λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO SE

$\exists\, v \neq 0$ e $Fv = \lambda v$ OVVERO

SE E SOLO SE $\exists v \neq 0$ e $v \in V_\lambda(F)$

#

PROPOSIZIONE $F: V \longrightarrow V$

K LINEARE $\dim V < +\infty$

1) F È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE $V = V_{\lambda_1}(F) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}(F)$

DOVE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI

2) F È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE $mg_{\lambda_1}(F) + \dots + mg_{\lambda_n}(F) = \dim V$

DOVE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI.

3) SE $\lambda_1 \dots \lambda_n$ SONO GLI AUTOVALORI ALLORA I SOTTOSPAZI

- $V_{\lambda_1}(F); \dots ; V_{\lambda_n}(F)$ SONO IN SOMMA DIRETTA
- $mg_{\lambda_1}(F) + \dots + mg_{\lambda_n}(F) \leq \dim V$

dim

1ª PARTE SE F È DIAGONALIZZABILE ALLORA

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$$

$$\dim V = mg_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus mg_{\lambda_n}$$

esiste una base $v_1 \dots v_d$ $\quad d = \dim V$

Tale che $F v_i = \lambda v_i$ per qualche λ.

$$[F]^{v_1 \,—\, v_d}_{v_1 \,\dots\, v_d} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

METTO VICINO GLI AUTOVETTORI CON LO STESSO AUTOVALORE

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & \\ \hline & 0 & & & & \lambda_3 & & \\ & & & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & & & \lambda_3 \end{array}\right)$$

$$V_{\lambda_1}(F) = N(F - \lambda_1 Id)$$

$$[F - \lambda_1 Id]^{v}_{v} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

X_1 | $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$.
$\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$

$$0 \qquad = (\lambda_3-\lambda_1) \quad = (\lambda_3-\lambda_1) \quad (\lambda_3-\lambda_1) \qquad x_8$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\, x_4 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\, x_5 \\ (\lambda_3-\lambda_1)\, x_6 \\ (\lambda_3-\lambda_1)\, x_7 \\ (\lambda_3-\lambda_1)\, x_8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \end{array}$$

$$N(F-\lambda_1 Id) = \underline{\{x : x_4 = x_5 = \cdots = x_8 = 0\}}$$

$$= \underline{\langle v_1 ; v_2 ; v_3 \rangle}.$$

$$N(F-\lambda_2 Id) = \langle v_4 ; v_5 \rangle$$

$$N(F-\lambda_3 Id) = \langle v_6 \quad v_7 \quad v_8 \rangle$$

- $V_{\lambda_1} = \underline{\langle v_1 \quad v_2 \quad v_3 \rangle}$ $\qquad mg_{\lambda_1} = 3$
- $V_{\lambda_2} = \underline{\langle v_4 \quad v_5 \rangle}$ $\qquad mg_{\lambda_2} = 2$

- $V_{\lambda_3} = \langle v_6 \ v_7 \ v_8 \rangle$ $\quad mg_{\lambda_3} = 3$

$\underline{V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} = V}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{mg_{\lambda_1} + mg_{\lambda_2} + mg_{\lambda_3} = \dim V}$.

VICEVERSA

1° FATTO $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ SONO IN SOMMA DIRETTA.

OVVERO SE $u_i \in V_{\lambda_i}$ E

$\boxed{u_1 + \dots + u_n = 0}$ $= u_1 + \dots + u_m$

ALLORA $u_i = 0$. SE $u_1, \dots, u_m \neq 0$

E $u_{m+1} \dots u_n = 0$

ALLORA $F u_i = \lambda_i u_i$ $\quad u_i \neq 0$.

QUINDI $u_1 \dots u_m$ SONO AUTOVETTORI CON AUTOVALORI DISTINTI QUINDI SONO LIN. INDIPENDENTI. (SABATO 9)

$$1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + \dots + 1 \cdot u_m = 0.$$

NON PUÒ ESSERE

$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n} \subseteq V$ è un

sottospazio di dim

$mg_{\lambda_1} + \dots + mg_{\lambda_n}$

E QUINDI $\leq \dim V$.

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE SE

→ $\boxed{V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V}$ O SE

→ $mg_{\lambda_1} + \cdots + mg_{\lambda_n} = \dim V$

ALLORA F È DIAGONALIZZABILE

OSSERVIAMO CHE $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V$

dim
"

SE $mg_{\lambda_1} + \cdots + mg_{\lambda_n} = \dim V$.

ASSUMIAMO $\boxed{V_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V$.

SIA $v_1 \ldots v_{mg_{\lambda_1}}$ UNA BASE DI V_{λ_1}

$v_1' \ldots v'_{mg_{\lambda_2}}$ " " " V_{λ_2}

E COSÌ VIA.

SONO AUTOVETTORI. $F(v_i) = \lambda_1 v_i$

$F(v_i') = \lambda_2 v_i'$

$\vdots$

e $v_1 \ldots v_1' \ldots v_1'' \ldots$ SONO UNA BASE DI V FATTA DA AUTOVETTORI E QUINDI F È DIAGONALIZZABILE #

RIPERCORRIAMO LA DIM. IN UN ESEMPIO

$\dim V = 3$. $\quad \overset{3}{\overset{\shortparallel}{\lambda_1}}, \overset{7}{\overset{\shortparallel}{\lambda_2}} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

AUTOVALORI $\quad mg_{\lambda_1} > 0 \quad mg_{\lambda_2} > 0$

E NON CI SONO ALTRI AUTOVALORI.

$$V_3 = N(F - 3Id) = \{v : Fv = \underline{3}v\}$$

$$V_7 = N(F - 7Id) = \{v : Fv = \underline{7}v\}$$

(1°) V_3 e V_7 SONO IN SOMMA DIRETTA.

OVVERO $\boxed{V_3 \cap V_7 = 0.}$

Se $Fv = 3v$ e $Fv = 7v$ ALLORA $4v = 0$

E QUINDI $v = 0$.

$$V_3 \oplus V_7 \overset{=}{\subset} V$$

$$mg_3 + mg_7 \leq 3$$

SUPPONIAMO CHE $V_3 \oplus V_7 = V$

OVVERO $\underset{2}{mg_3} + \underset{1}{mg_7} = 3$.

1 2

SUPPONIAMO $mg_3 = 2$ $mg_7 = 1$.

$\underline{\underline{\dim V_3}} = 2$ $\dim V_7 = 1$.

v_1, v_2 BASE DI $\underline{V_3}$

$\underline{v_3}$ BASE DI V_7

v_1 v_2 v_3 SONO LIN. INDIP.

E QUINDI SONO UNA BASE DI V.

$v_1 \in V_3$ $F(v_1) = 3v_1$.

$v_2 \in V_3$ $F(v_2) = 3v_2$.

$v_3 \in V_7$ $F(v_3) = 7v_3$.

ESEMPIO

$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ TALE CHE

1, 3, 5, 6 SONO AUTOVALORI.

ALLORA
- NON CI SONO ALTRI AUTOVALORI
- $mg_1 = mg_3 = mg_5 = mg_6 = 1$
- F È DIAGONALIZZABILE

- Sia λ un altro autovalore $mg_\lambda > 0$
  $\lambda \neq 1, 3, 5, 6$.

$$\underbrace{\underset{0}{\underset{\vee}{mg_1}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_3}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_5}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_6}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_\lambda}}}_{\geq 5} \underset{A}{\overset{\uparrow}{\leq}} \dim V = 4.$$

QUINDI NON CI SONO ALTRI AUTOVALORI

$$\underset{0}{\underset{\vee}{mg_1}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_3}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_5}} + \underset{0}{\underset{\vee}{mg_6}} \leq 4$$

QUINDI $\underline{mg_1 + mg_3 + mg_5 + mg_6 = 4}$

E SONO TUTTI UGUALI.

PER LA PROPOSIZIONE È DIAGONALIZZABILE

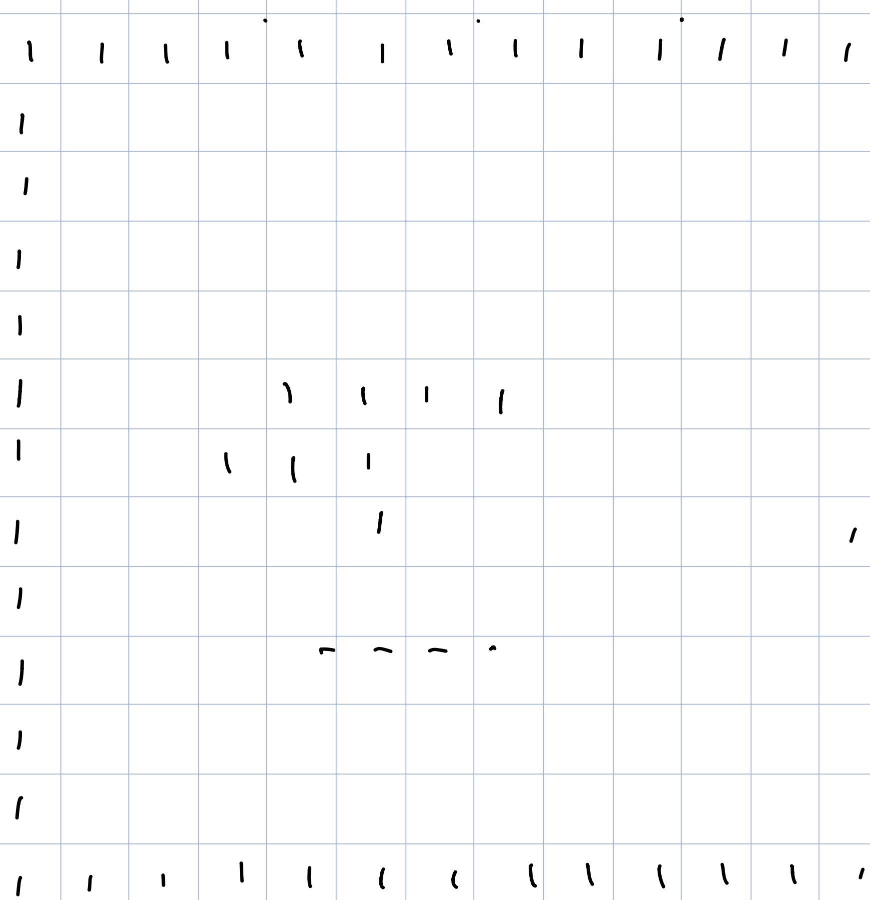
PIÙ IN GENERALE $F: V \to V$ $\dim V = n$

e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori distinti.

ALLORA

- F È DIAGONALIZZABILE
- $mg_{\lambda_i} = 1$
- NON CI SONO ALTRI AUTOVALORI.

11.5 A MATRICE 13×13.



CALCOLARE $P_A = \mathrm{Det}(A - t)$.

RANGO $A = 1$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & & - \\ - & & - & - & \cdot \\ - & & - & & - \end{array}$$

$$\dim N(L_A) = 13 - \dim \mathrm{Im}\, L_A =$$
$$= 13 - 1 = 12.$$

$$N(L_A) = \{ v : \; A \cdot v = 0 \} = V_0(L_A)$$

$$mg_0 = 12.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ \vdots \\ 13 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$mg_{13} > 0.$$

$$\underset{12}{mg_0} + \underset{\substack{\vee \\ 0}}{mg_{13}} \leq 13.$$

- $mg_{13} = 1$
- non ci sono altri autovalori
- A È DIAGONALIZZABILE.

Sia $v_1 \dots v_{13}$ UNA BASE DI AUTOVETTORI.

$$\underline{B} = [L_A]^{v_1 \dots v_{13}}_{v_1 \quad v_{13}} = \begin{pmatrix} 13 & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

12 VOLTE.

$$\underline{Det(B-t)} = Det(L_A - tI) = Det(A - t\,Id)$$

$$\begin{pmatrix} 13-t & & 0 \\ & -t & \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} & -t & & \\ & & -t & \\ & 0 & & \\ & & & -t \end{pmatrix}$$

$$= (13-t)(-t)^{12} = 13t^{12} - t^{13}$$

$$P_A(t) = 13t^{12} - t^{13}.$$

DEFINIZIONE

$F : V \longrightarrow V \qquad \dim V < +\infty.$

$$P_F(t) = (t-\alpha_1)^{m_{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot (t-\alpha_k)^{m_{\alpha_k}} \cdot q(t)$$

$\uparrow$ non ha radici.

$K = \mathbb{R}.$

Esem. $\qquad (t-1)^3 \, (t-2)^7 \, (t-5) \, \underline{(t^2+1)}$

$m_1 = 3 \qquad m_2 = 7 \qquad m_5 = 1.$

$m_0 = 0 \qquad m_6 = 0.$

DEFINIZIONE $F: V \longrightarrow V$. $\dim V < +\infty$.

$me_\lambda(F)$ = molteplicità di λ come radice del polinomio $p_F(t)$

molteplicità algebrica di λ.

PROPOSIZIONE

1) $me_\lambda(F) > 0$ SE E SOLO SE λ È UN AUTOVALORE

1') $mg_\lambda(F) > 0$ SE E SOLO SE λ È UN AUTOVALORE.

2) Se $\lambda_1 \dots \lambda_n$ gli autovalori

$$me_{\lambda_1} + \dots + me_{\lambda_n} \leq \dim V.$$

2') LA STESSA COSA PER LE mg_λ.

DIM 1' e 2') LI ABBIAMO VISTI PRIMA.

1) λ È UN AUTOVALORE SE E SOLO

SE λ È UNA RADICE DI $P_F(t)$

OVVERO SE LA MOLTEPLICITÀ DI λ

COME RADICE DI $P_F(t)$ È MAGGIORE DI 0.

2)

$$P_F(t) = \underline{(t-\lambda_1)}^{me_{\lambda_1}} \underline{\cdots\cdots} \cdot \underline{(t-\lambda_n)}^{me_{\lambda_n}} \underline{q(t)}$$

$$\underline{\text{grado}\left(P_F(t)\right)} = \underline{me_{\lambda_1} + \cdots + me_{\lambda_n}} + \text{grado } q.$$

quindi $\quad me_{\lambda_1} + \cdots + me_{\lambda_n} \leq \text{grado } P_F(t) = \dim V.$

#

E SEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A - tI) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 - t & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - t & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - t \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 - t & b_1 & c_1 & a_1 - t & b_1 \\
a_2 & b_2 - t & c_2 & a_2 & b_2 - t \\
a_3 & b_3 & c_3 - t & a_3 & b_3
\end{array}
$$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0$

$$p(t) = (a_1 - t)(b_2 - t)(c_3 - t) + \text{polin. di grado} \leq 1.$$

$$= -t^3 + t^2 (a_1 + b_2 + c_3) + \ldots\ldots$$

$$= -t^3 + t^2 \, Tr(A) + \ldots\ldots + \_\_\_\_$$

$$p(t) = Det(A - t\, Id)$$

$$p(0) = Det(A)$$

$$p(t) = -t^3 + t^2 \, Tr(A) + \cdots t + Det(A)$$

OSSERVAZIONE

Se A È UNA MATRICE $n \times n$

ALLORA D

$$P_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n+1} t^{n-1} \, Tr(A) + \cdots + Det\, A$$

$n = 2$ $\quad t^2 - Tr\, A\, t + Det\, A$

$n = 4$ $\qquad t^4 - \mathrm{Tr}\, A\, t^3 + \cdots + \cdots + \underline{\mathrm{Det}\, A}$

$n = 5$ $\qquad -t^5 + \mathrm{Tr}\, A\, t^4 + \cdots + \cdots + \cdots + \underline{\mathrm{Det}\, A}$.

in particolare grado $p_A = n = \dim V$.

Il termine noto $= p_A(0) = \mathrm{Det}(A - 0I) =$

$= \mathrm{Det}\, A$.