K^n $\qquad$ K UN CAMPO

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$K^n = K \times \dots \times K = \{ (x_1, \dots x_n) : x_i \in K \}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (x_1 \dots x_n)$$

<u>SOMMA</u> E PRODOTTO PER UN NUMERO

$$(3, 4, 5) + (4, -1, 2) = (3+4, 4-1, 5+2)$$
$$= (7, 3, 7)$$

$$(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \dots x_n + y_n).$$

$$3 \cdot (1, -1, 3, 4) = (3 \cdot 1, 3 \cdot (-1), 3 \cdot 3, 3 \cdot 4)$$
$$= (3, -3, 9, 12)$$

$\lambda \in K$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2 \dots x_n) = (\lambda x_1 ; \lambda x_2 ; \dots ; \lambda x_n)$$

MATRICI $\underline{m} \times \underline{n}$ A COEFFIC. IN K.

$m = 2 \qquad n = 3 \qquad$ Matrice 2×3 a coeff in $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 3{,}1 & 7 & 5 \\ -1 & 1/\pi & 0 \end{pmatrix}$$

in generale una matrice $m \times n$ a coeff. in K è UNA TABELLA RETT. CON m RIGHE E n COLONNE LE CUI ENTRATE SONO ELEMENTI.

$$\mathrm{Mat}_{m \times n}(K) = \{ \text{matrici } m \times n \text{ a coeff in } K \}$$

$$\mathrm{Mat}_{1 \times n}(K) = \{ (x_1 \dots x_n) \quad x_i \in K \}$$

VETTORI RIGA

$$\mathrm{Mat}_{n \times 1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$$

VETTORI COLONNA.

SOMMA E PRODOTTO PER UN NUMERO

Se A e B SONO MATRICI DELLA STESSA FORMA LE POSSO SOMMARE

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 3+5 \\ 4-7 & -5+3 \\ \sqrt{2}+1 & 0+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -3 & -2 \\ 1+\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

IN GENERALE SE $A, B \in Mat_{m \times n}(K)$

È DEFINITA $A + B \in Mat_{m \times n}(K)$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & -9 & 21 \end{pmatrix}$$

SE A È UNA MATRICE $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}$$

l'entrata ij della matrice A è il NUMERO CHE SI TROVA ALL' I-ESIMA RIGA E J-ESIMA COLONNA.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

UNA MATRICE $m \times n$ LA POSSIAMO PENSARE ANCHE COME m - RIGHE DI LUNGHEZZA n O n COLONNE DI LUNGHEZZA m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(i)} = (a_{i1} \quad a_{in})$$

È L' i-ESIMA RIGA

$$A_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ È LA j-ESIMA COLONNA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

SE A è $m \times \underline{\underline{n}}$ e B è $\underline{\underline{n}} \times p$

ALLORA È DEFINITA $A \cdot B$ UNA MATRICE $m \times p$.

1° CASO $m = 1$ E $p = 1$

$$A = (x_1 \dots x_n) \qquad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

È UNA MATRICE 1×1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 + 10 + 18 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}$$

Se A È $m \times \underline{n}$ E B È $\underline{n} \times p$

DEFINISCO $C = A \cdot B$ UNA MATRICE $m \times p$ NEL SEGUENTE MODO

L'ENTRATA c_{ij}: $c_{ij} = \underline{A^{(i)} \cdot B_{(j)}}$

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

p

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ -4 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE

- Se A è 2×3 e B è 3×4

$A \cdot B$ è 2×4

NON POSSO FARE $B \cdot A$.

- SE A è 2×2 e B è 2×2

$A \cdot B$ $\qquad$ $B \cdot A$

SONO MATRICI 2×2

NON È DETTO CHE SIANO UGUALI.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 1} \\ \boxed{0 \quad 0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA.$$

ALCUNE MATRICI SPECIALI.

$$O = \underline{O}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

FISSATI m E n

$$E_{hk} = \left(e_{ij} \right) \quad \text{con} \quad e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq h \text{ o } j \neq k \\ 1 & \text{se } i = h \text{ e } j = k \end{cases}$$

Se $m = 2$ $n = 3$

$$E_{11} \quad E_{12} \quad E_{13} \quad E_{21} \quad E_{22} \quad E_{23}$$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SE $m = n$

MATRICE IDENTITÀ $m \times m$

$$= I_m = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E_{12} di taglia 4×2

$$(a \;\; b \;\; c \;\; d) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- E_{32}
- E_{ij}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d =$
$= a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c + 0 \cdot d =$$
$$= c$$

$A \cdot E_{ij} =$ avrà tutte colonne uguali A ZERO TRANNE LA j-ESIMA E LA j-ESIMA COLONNA SARÀ UGUALE A $A_{(i)}$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI

1) • A, B, C $\quad A$ $m \times n$ $\quad B, C$ $n \times p$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

2) • A, B, C $\quad A, B$ $m \times n$ $\quad C$ $n \times p$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

3) • A, B $\quad A$ $m \times n$ $\quad B$ $n \times p$ $\quad \lambda \in K$

$$\lambda (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$$

4) • A, B, C $\quad A$ $m \times n$ $\quad B$ $n \times p$ $\quad C$ $p \times q$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

DIMOSTRAZIONE DI 4)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{pq} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E = \underbrace{(A \cdot B)}_{m \times p} \cdot \underset{p \times q}{C} \quad m \times q} \qquad F = \underset{m \times n}{A} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{n \times q} \quad m \times q$$

Facciamo vedere che l'entrata ij di E è uguale all'entrata ij di F.

$$\underbrace{(A \cdot B)}^{(i)} \cdot C_{(j)} = \underbrace{\left(A^{(i)} B_{(1)}, A^{(i)} B_{(2)} \cdots \right)}_{p} \cdot C_{(j)}$$

$$\left(A^i \cdot B_1, A^i \cdot B_2, \ldots, A^i B_p \right) \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{A^i \cdot B_1}\cdot c_{1j} + \underbrace{A^i B_2}\cdot c_{2j} + \cdots + \underbrace{A^i B_p}\, c_{pj} =$$

$=$

$$\underbrace{A^i \cdot B_h} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1h} \\ b_{2h} \\ \vdots \\ b_{nh} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} b_{1h} + a_{i2} b_{2h} + \cdots + a_{in} b_{nh}$$

$$= (a_{i1} b_{11} + a_{i2} b_{21} + \cdots + a_{in} b_{n1}) \cdot c_{1j} +$$
$$+ (a_{i1} b_{12} + a_{i2} b_{22} + \cdots + a_{in} b_{n2}) \cdot c_{2j} +$$
$$+ (a_{i1} b_{1p} + a_{i2} b_{2p} + \cdots + a_{in} b_{np}) \cdot c_{pj} \qquad =$$

$$= a_{i1} b_{11} c_{1j} + a_{i2} b_{21} c_{1j} + \cdots + a_{in} b_{n1} c_{1j} +$$
$$+ a_{i1} b_{12} c_{2j} + \cdots + a_{in} b_{n2} c_{2j}$$
$$+ a_{i1} b_{1p} c_{pj} + \cdots + a_{in} b_{np} c_{pj}$$

$$\boxed{\sum \boxed{a_{i?}\quad b_{?1}\quad c_{1j}}}$$

$$A \cdot (B \cdot C)$$