SIA V UN K-SPAZIO VETTORIALE

U e W SOTTOSPAZI.

ES.
2 PIANI IN $\mathbb{R}^3$

OSSERVAZIONE

$U \cap W$ È UN SOTTOSPAZIO

dim
- $0 \in U \quad 0 \in W \Rightarrow 0 \in U \cap W$
- $x, y \in U \cap W \Rightarrow x, y \in U \Rightarrow x+y \in U$
  $x, y \in W \Rightarrow x+y \in W$

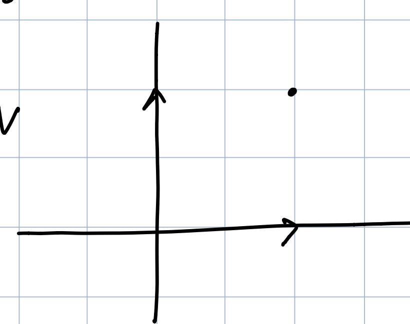
  e quindi $x, y \in U \cap W$
- $\lambda \in K \quad x \in U \cap W \Rightarrow$.
  $\lambda \in K \quad x \in U \Rightarrow \lambda x \in U$
  $\lambda \in K \quad x \in W \Rightarrow \lambda x \in W$

  e quindi $\lambda x \in U \cap W$ #

OSSERVAZIONE

$U \cup W$ NON È SOTTOSPAZIO

$U = \{ (x, 0) \} \subset \mathbb{R}^2 = V$
$W = \{ (0, y) \} \subset \mathbb{R}^2 = V$



$(1,0) + (0,1) \notin U \cup W$

DEFINIZIONE U, W K-SOTTOSP. DI V

$$U + W = \{ \underline{u + w} \; : \; u \in U \quad w \in W \}.$$

PROPOSIZIONE

1) $U + W$ è un sottospazio
2) Se Z è un sottospazio e $Z \supset U \cup W$ allora $Z \supset U + W$

dim

1) • $0_V \in U + W$ infatti $0_V = \underset{U}{\underset{\cap}{0_V}} + \underset{W}{\underset{\cap}{0_V}}$

• Se $x, y \in U + W \Rightarrow x + y \in U + W$.

$x = u + w$ con $u \in U$ $w \in W$

$y = u' + w'$ con $u' \in U$ $w' \in W$

$$x + y = \underbrace{(u + u')}_{\in U} + \underbrace{(w + w')}_{\in W}$$

• Se $x \in U + W$ $\lambda \in K \Rightarrow \lambda x \in U + W$

(esercizio)

2) $\underline{Z \supset U \cup W} \Rightarrow \underline{Z} \supset \underline{U + W}.$

Sia $x \in U + W$ allora $x = u + w$ $\underline{u \in U}$ $\underline{w \in W}$

quindi $u \in Z$ e $w \in Z$ e quindi $u + w \in Z$.

ovvero $x \in Z$ #

ESEMPIO

$\rightarrow U = \langle u_1 \dots u_\ell \rangle \leftarrow$

$\rightarrow W = \langle w_1 \dots w_k \rangle \leftarrow$

$\underline{U+W} = \langle u_1 \dots u_\ell \; w_1 \dots w_k \rangle \leftarrow$

$U+W$ è il più piccolo sottosp. che contiene U ovvero contiene $u_1 \dots u_\ell$

e W ovvero contiene $w_1 \dots w_k$

quindi è $\langle u_1 - u_\ell \; w_1 - w_k \rangle$.

$$U+W = \{ u+w : u \in \underline{\underline{U}} \;\; \underline{\underline{w \in W}} \}$$
$$= \{ a_1 u_1 + \dots + a_\ell u_\ell + b_1 w_1 + \dots + b_k w_k : a_i, b_i \in K \}$$

U e W SONO K-SOTTOSPAZI DI V

$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \dim U, \dim W$$

$$\dim W, \dim U \leq \dim(U+W) \leq \dim V.$$

TEOREMA (Formula di Grassmann)

V K-SPAZIO VETTORIALE $\dim V < +\infty$

U e W K-SOTTOSPAZI VETTOR.

$$\dim(U+W) + \dim(\underbrace{U \cap W}) = \dim U + \dim W.$$

$\underline{\underline{\dim}}$

Sia $v_1 \dots v_a$ una base di $U \cap W$

$\dim(U \cap W) = a$

$U \cap W \subset \underline{\underline{U}}$

Sia $v_1 \dots v_a\ u_1 \dots u_b$ una base di U

$\dim U = a + b$

$U \cap W \subset \underline{\underline{W}}$

Sia $v_1 \dots v_a\ w_1 \dots w_c$ una base di W

$\dim W = a + c$

$U = \langle \underline{v_1 \quad v_a\ u_1 \quad u_b} \rangle \qquad W = \langle \underline{v_1 \quad v_a\ w_1 \quad w_c} \rangle$

quindi

$$\underline{U + W = \langle v_1 \dots v_a\ u_1 \quad u_b\ w_1 \quad w_c \rangle}$$

Se dimostro che $v_1 \dots v_a\ u_1 \quad u_b\ w_1 \quad w_c$ sono una base di $U+W$ allora la tesi segue

$$\dim(U+W) = a + b + c$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(U+W) & + & \dim(U \cap W) & = & \dim U & + & \dim W \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ a+b+c & & a & & a+b & & a+c \end{array}$$

$$2a + b + c \qquad\qquad 2a + b + c$$

Dimostro che $v_1 — v_a\ u_1 — u_b\ w_1 — w_c$ sono una base di $U+W$

- so che generano.
- DEVO VERIFICARE CHE SONO L. I.

OVVERO CHE SE

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_a v_a}_{} + \underbrace{\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b}_{} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_c w_c}_{} = 0$$

ALLORA $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \gamma_c = 0$

$$v + u + w = 0$$

$$W \ni w = \underset{U \cap W}{\underset{\cap}{-v}} \underset{U}{\underset{\cap}{-u}} \in U$$

$$w = -v - u \in U \cap W.$$

$$U \cap W \ni \boxed{-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 \cdots - \alpha_a v_a} \underbrace{- \beta_1 u_1 \quad - \beta_b u_b}$$

$v_1 \dots v_a\ u_1 \dots u_b$ sono una base di U.
di U

quindi un elemento si scrive come comb. lineare di $v_1 \dots u_b$ in modo unico.
e quelli di $U \cap W$ si scrivono come combinazione lineare solo di $v_1 \dots v_a$

QUINDI $\boxed{\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0}$ $\Rightarrow u = 0$

DA CUI $v + w = 0$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_a v_a + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_c w_c = 0$$

RICORDO CHE $v_1 \dots v_a\ w_1\ \ w_c$ È UNA BASE DI W, QUINDI $\boxed{\alpha_1 = \dots = \alpha_a = \gamma_1 = \dots = \gamma_c = 0}$

QUINDI HO DIMOST. CHE $v_1 — v_a\ u_1 — u_b\ w_1 — w_c$ SONO L. I.

#

ESEMPIO $\mathbb{R}^3$ U e W due piani per l'origine.
$\dim U = \dim W = 2$

- $U = W$
- $U \cap W$ è una retta

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = 2 + 2 = 4.$$

$$U \subset U+W \subset \mathbb{R}^3$$
$$2 \leq \dim(U+W) \leq 3$$

Se $\dim(U+W) = 2$

$$\dim(U \cap W) = 2$$
$$U \cap W \subset U$$

$2 = \dim (U \cap W) = \dim U \Rightarrow U \cap W = U$

$U \subset W$

SIMILMENTE RICAVATE $W \subset U$

SE $\dim (U + W) = 3$

$\dim (U \cap W) = 1$

QUINDI $U \cap W$ È UNA RETTA.

<u>DEFINIZIONE</u> V SP. VETT $\dim V < +\infty$

$W \subset V$ SOTTOSP. VETT.

$\dim W = 1$ W È UNA RETTA

$\dim W = 2$ DICIAMO CHE È UN PIANO

$\dim W = \dim V - 1$ DICIAMO CHE È UN IPERPIANO.