$v_1, \dots, v_n \in K^m$

A matrice le cui colonne sono $v_1 \dots v_n$.

- $v_1 \dots v_n$ sono L. I. $\Leftrightarrow$ rango $A = n$
- $v_1 \dots v_n$ generano K^m $\Leftrightarrow$ rango $A = m$

1° Se $v_1 \dots v_n$ sono L. I $\Rightarrow$ $n \leq m$

2° Se $v_1 \dots v_n$ gen. K^m $\Rightarrow$ $n \geq m$

3° Tutte le basi di K^m hanno m elementi

4° Se $n = m$ allora

$v_1 \quad v_m$ sono L. I. $\Leftrightarrow$ generano K^m $\Leftrightarrow$ sono una base di K^m

DEFINIZIONE Sia V un K-spazio vettoriale

V ha dimensione finita se esistono $v_1 \dots v_n \in V$ che generano V. $\dim_K V < +\infty$

PROPOSIZIONE Se V ha dimensione finita allora V ha una base.

dim Siano $v_1 \dots v_n$ generatori di V.

Consideriamo un sottoinsieme di $v_1 \dots v_n$
$v_{i_1} \dots v_{i_k}$ tali che

1° $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ generano V

2° un sottoinsieme di $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ non genera.

allora $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ sono una base

#

LA DIM. DELLA PROPOSIZIONE NON SOLO MOSTRA CHE ESISTE UNA BASE MA ANCHE CHE DATI DEI GENERATORI POSSO ESTRARNE UNA BASE.

<u>TEOREMA</u> V un K-spazio vettoriale di dimensione finita.

1) Tutte le basi di V hanno lo stesso n° di elementi.
E IL NUMERO DI ELEMENTI DI UNA BASE SI CHIAMA $\dim_K V$.
DIMENSIONE DI V.

2) Se $v_1 \dots v_n \in V$ sono L.I.
allora $n \le \dim V$

3) Se $v_1 \dots v_n \in V$ sono generatori di V allora $n \geq \dim V$

4) Se $m = \dim V$ e $v_1 \dots v_m \in V$

$v_1 \dots v_m$ sono una base $\iff$ sono L. I. $\iff$ sono generatori.

<u>dim</u>

V ha una base $u_1 \dots u_m$

$$\boxed{V} \xrightarrow{\ F\ } \underline{K^m}$$

$$v \longrightarrow [v]_{u_1 \dots u_m}$$

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_m u_m \xleftarrow{\ G\ } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

1) $\boxed{\underline{v_1 \dots v_n \text{ base di } V} \quad \text{allora } F(v_1) \dots F(v_n) \text{ è una base di } \underline{K^m}}$

da cui per il teo di mercoledì. $n=m$

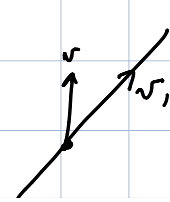
#

ESERCIZIO 7.?

$v_1 \dots v_n$ L. I. in V. $v \in V$.

$\underline{v_1 \dots v_n \, v \text{ sono L. I.}} \iff \underline{v \notin \langle v_1 \dots v_n \rangle}$

$\boxed{\Rightarrow}$ p.a. $v \in \langle v_1 \dots v_n \rangle$



$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$\underset{V}{0} = \underline{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n - 1 \cdot v}$$

quindi $v_1 \text{---} v_n \; v$ non sono L.I.

$\boxed{\Leftarrow}$ Voglio dimostrare che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + \underline{a v} = 0_V$$

allora $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = 0$.

Se $a = 0$ $\quad a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$

da cui $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

p.e. $\underline{a \neq 0}$

$$\frac{a_1}{a} v_1 + \cdots + \frac{a_n}{a} v_n + v = 0$$

$$v = -\frac{a_1}{a} v_1 \cdots - \frac{a_n}{a} v_n$$

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \qquad b_i = -\frac{a_i}{a}$$

contro $v \notin \langle v_1 \ldots v_n \rangle$.

#

PROPOSIZIONE V un K-sp. vettoriale

$\dim V < +\infty$

1) $W \subset V$ un sottosp. vett.

allora $\dim W < +\infty$

2) Se $v_1 \dots v_n \in V$ L. I. allora li potete completare ad una base ovvero $\exists \; v_{n+1} \dots v_m$

$v_1 \dots v_n \; v_{n+1} \dots v_m$ sono una base di V ■

<u>dim</u> 2) $v_1 \dots v_n$ L. I. $\Rightarrow n \leq \dim_K V = m$

Se $v_1 \dots v_n$ generano V allora $v_1 \dots v_n$ sono una base

Se $\langle v_1 \dots v_n \rangle \neq V$ scelgo a caso $v_{n+1} \notin \langle v_1 \dots v_n \rangle$

$v_1 \dots v_n \; v_{n+1}$

procedo in questo modo aggiungo $v_1 \dots v_n \; v_{n+1} \dots v_h$ fino a $h = m$

per $h = m$ devono per forza essere una base

1) $W \subset V$.

. $W = 0$

. $W \neq 0$ $\quad v_1 \in W \quad v_1 \neq 0$.

Suppongo di aver costruito

• $v_1 \dots v_n \in W$ e L. I. $\quad n \leq \dim V = m$

(*) • Se $\langle v_1 \text{—} v_n \rangle = W$ allora sono una base di W

• Se $\langle v_1 \dots v_n \rangle \neq W$ allora scelgo $v_{n+1} \in W \setminus \langle v_1 \dots v_n \rangle$

In questo trovo una successione $v_1 \dots v_h$ di vettori L.I. di W.
e prima o poi ci troveremo nella situazione (*) altrimenti questa successione si allungherebbe a piacere contro il fatto che la lista è al massimo lunga m. #