$V \qquad v_1 \dots v_n \in V$

$$\langle v_1 \dots v_n \rangle = \{ a_1 v_1 + \dots + a_n v_n : a_1, a_2, \dots, a_n \in K \}$$

① $\boxed{\langle v_1, \dots, v_n \rangle}$ è un sottosp. vett. — ieri

② $v_i \in \langle v_1 \dots v_n \rangle$ per $i = 1 \dots n$ — ieri

③ $W \subset V$ è un sottospazio vett. e $v_i \in W$ per $i = 1, \dots, n$ allora $\langle v_1 \dots v_n \rangle \subset W$

dim

$v_i \in W$ e poiché W è sottoSPAZIO VETT.

$a_i v_i \in W$

$a_1 v_1 \quad a_2 v_2 \quad \dots \quad a_n v_n \in W$

quindi $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W$

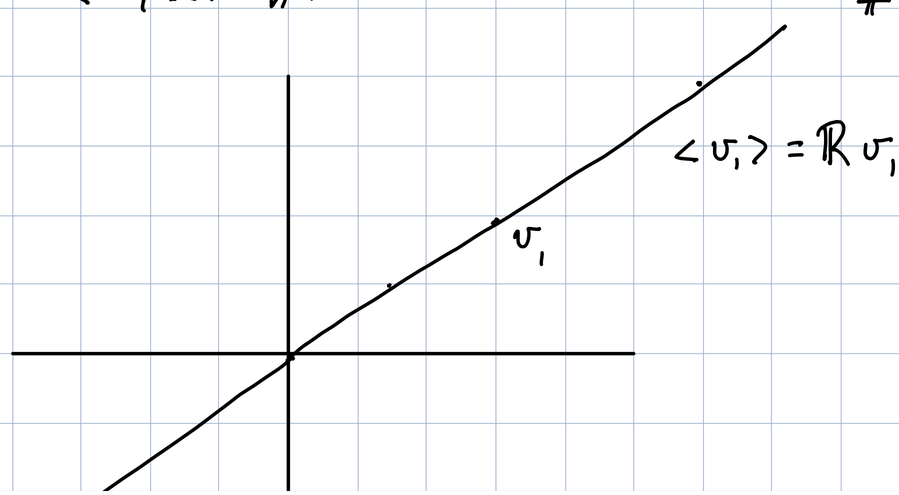
comunque abbia scelto $a_1 \dots a_n \in K$.

ovvero

$$\langle v_1 \dots v_n \rangle \subset W$$

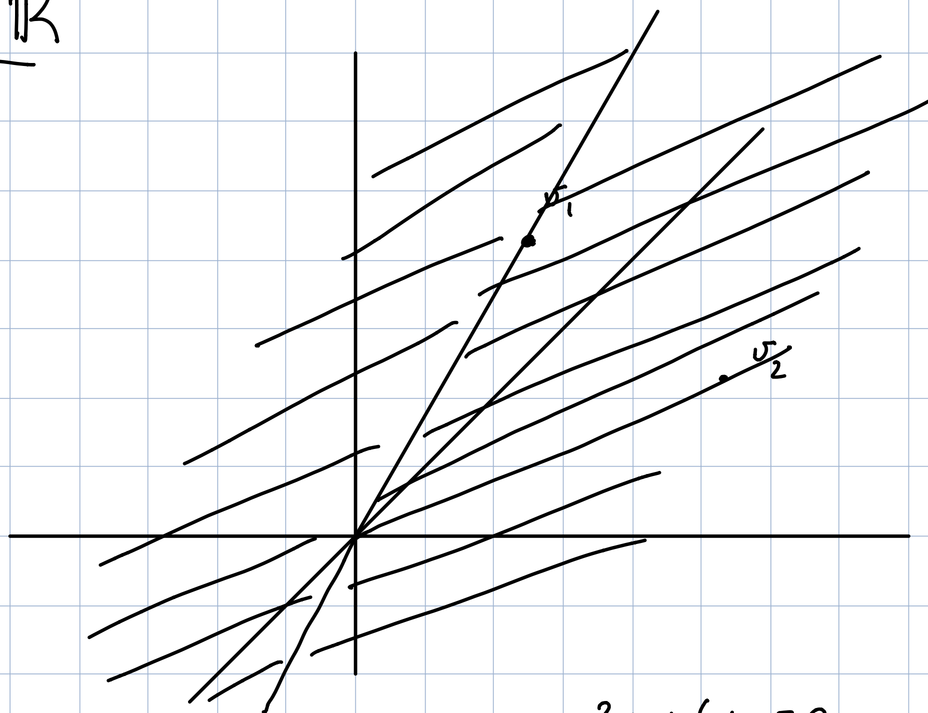
#

Esempio $\mathbb{R}^2$



Esempio $\mathbb{R}^3$

$a v_1 + b v_2$



- $3x + 4y = 0$ $\quad \mathbb{R}^2$
- $x + y + z = 0$. $\quad \mathbb{R}^3$

DEFINIZIONE

$v_1 \dots v_n$ si dicono GENERATORI DI V
SE $\langle v_1 \dots v_n \rangle = V$
OVVERO SE OGNI ELEMENTO È COMBINAZ. LINEARE DI $v_1 \dots v_n$

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

ESEMPIO Se $v_1 \dots v_n$ sono una base di V allora generano V.

Esempio $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 \; v_2 \; v_3$ generano $\mathbb{R}^2$ ma non sono una base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

DEFINIZIONE

$v_1 \dots v_n \in V$ si dicono lin. indipendenti se

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

allora $a_i = b_i$.

LEMMA

$v_1 \dots v_n$ SONO LIN. INDIP. SE E SOLO SE

$$\longrightarrow \boxed{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \quad \text{IMPLICA} \quad a_1 = \dots = a_n = 0.}$$

dim

SE $v_1 \dots v_n$ SONO LIN. INDIP. ALLORA

VALE $\boxed{}$

$$\underline{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n} = 0_V = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\underline{a_1} v_1 + \dots + \underline{a_n} v_n = \underline{0} v_1 + \dots + \underline{0} v_n$$

quindi $a_i = 0$ per ogni i.

VICEVERSA

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

$$a_1 v_1 - b_1 v_1 + a_2 v_2 - b_2 v_2 \dots + a_n v_n - b_n v_n = 0_V$$

$$(a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0_V$$

quindi $a_1 - b_1 = 0 \quad a_2 - b_2 = 0 \quad \dots \quad a_n - b_n = 0$

ovvero $a_i = b_i$ per $i = 1 \dots n$ #

OSSERVAZIONE

$v_1 \dots v_n$ SONO UNA BASE DI V SE E SOLO SE SONO

1) GENERATORI DI V

2) SONO LIN. INDIP.

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

QUALI VETTORI $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ SONO LIN. INDIP. CON v_1 ?

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{a v_1 + b v_2 = 0_V}$ $\quad \begin{cases} a+b=0 \\ a+3b=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

$v_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$ $\quad a v_1 + b v_3 = 0_V$ $\quad \begin{cases} a=\pi \\ b=-1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v_3 = \pi v_1$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

OSS Se $v_1 \neq 0$

allora v è lin dipendente se e solo se $v = \lambda v_1$ con $\lambda \in \mathbb{K}$

LEMMA $v_1 \dots v_n \in V$

1) Se $v_1 \dots v_n$ generano V ma ogni sottoinsieme di $\{v_1 \dots v_n\}$ non genera v allora
$v_1 \dots v_n$ sono una base di V.

2) Se $v_1 \dots v_n$ sono lin. indip. e se aggiungete un qualsiasi v_{n+1} non sono più lin. indip. Allora $v_1 \dots v_n$ sono una base.

dim

1) VOGLIO DIMOST. CHE $v_1 \dots v_n$ SONO LIN. INDIP. OVVERO CHE SE

$$\boxed{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V \quad \text{ALLORA} \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0}$$

P.A. SUPPONIAMO NON SIA VERO.
OVVERO

$$0_V = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

e supponiamo $a_1 \neq 0$

$$0_V = v_1 + \boxed{\frac{a_2}{a_1}} v_2 + \dots + \frac{a_n}{a_1} v_n$$

OVVERO

$$v_1 = b_2 v_2 + \dots + b_n v_n \qquad b_i = -\frac{a_i}{a_1}$$

$$v_1 \in \langle v_2 \dots v_n \rangle$$

$$v_2 \dots v_n \in \langle v_2 \dots v_n \rangle$$

QUINDI PER IL 3° DI INIZIO LEZIONE

$$V = \langle v_1 \dots v_n \rangle \subset \underline{\underline{\langle v_2 \dots v_n \rangle}} \subset V$$

QUINDI $\underline{\langle v_2 \dots v_n \rangle} = V.$

CONTRO L'IPOTESI CHE $v_1 \dots v_n$
ERA UN INSIEME DI GEN. MINIMALE.

#