BASE DI UNO SP. VETTORIALE

V $\qquad v_1 \dots v_n \in V$ SONO UNA BASE

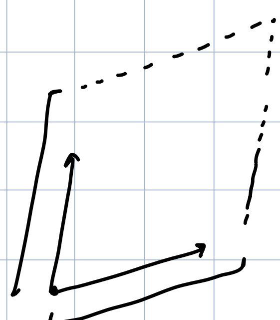
SE $\quad \forall v \in V \quad \exists_1\, a_1 \dots a_n \in K$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

<u>Esempi</u> $\qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \in K^n$

$$e_1, e_2, \dots e_n \ \text{è una base di } K^n$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sono una base di } \mathbb{R}^2$$



<u>DEFINIZIONE</u> $\quad$ Se $v_1 \dots v_n$ è una base di V

e $\qquad v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Allora $\qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [v]_{v_1 \dots v_n}$

SI CHIAMANO LE COORDINATE DI V RISPETTO ALLA BASE $v_1 \dots v_n$.

Esempio $\quad V = \mathbb{C}^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1° v_1 e v_2 SONO UNA BASE

2° TROVARE LE COORDINATE DI $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \qquad \underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

DEVO FAR VEDERE CHE ESISTONO UNIVOC. DETERMINATI a, b TALI CHE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 3a + 2b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} a + b = x \\ 3a + 2b = y \end{cases}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{cases} a = y - 2x \\ b = 3x - y \end{cases}}$$

IN PARTICOLAR SE $x = 3 \quad y = 5$

$a = -2 \qquad b = 5$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 v_1 + 5 v_2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_{v_1 \, v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO $e_1 \dots e_n$ la base di K^n definita prima. (SI CHIAMA LA BASE STANDARD).

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{[v]_{e_1 \dots e_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}$$

VERIFICHIAMO

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\parallel$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

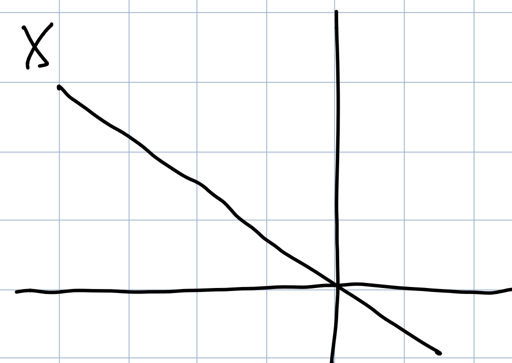
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 0 + 0 \dots + 0 \\ 0 + x_2 + 0 \dots 0 \\ \\ 0 + \dots + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$$

ESEMPIO $\mathbb{R}^2$

$$X = \{ (x,y) : 3x + 4y = 0 \}.$$

voglio trovare una base di X



$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in X.$$

Dimostro che è una base.

OVVERO PER OGNI $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X$ $\exists_1\, a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{cases} x = -4a \\ y = 3a \end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \qquad \boxed{3x + 4y = 0.} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{4}{3} y}$$

a è unico. infatti $a = \dfrac{y}{3}$

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{y}{3} = y \\ -4 \cdot \dfrac{y}{3} = -\dfrac{4}{3} y = x. \end{cases}$$

Esempio $V = \mathbb{C}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 0 \right\}$$

$W \qquad x = 2y - z$

$y=1 \quad z=0 \qquad x=2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

$y=0 \quad z=1 \qquad x=-1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W.$

v_1 e v_2 sono una base. $\quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$

$$\exists_! a, b : \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2 = \begin{pmatrix} 2a - b \\ a \\ b \end{pmatrix}} \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}$$

UNICITÀ DALLA II° COORD. $a = y$

DALLA III° COORD. $b = z$.

ESISTENZA. SCELGO $a = y \quad b = z$

E VERIFICO $x = 2a - b = 2y - z$

$x = 2y - z.$

SOTTOSPAZIO GENERATO

$V \qquad v_1, \ldots, v_n \in V$

UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1 \ldots v_n$

È UNA ESPRESSIONE DI QUESTO TIPO

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

$\mathrm{Span}\{v_1 \dots v_n\} = \langle v_1 \dots v_n \rangle$

IL SOTTOSPAZIO GENERATO DA $v_1 \dots v_n$

$$= \{ \underline{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n} : a_1, a_2, \dots a_n \in K \}$$

<u>PROPOSIZIONE</u>

1) $\langle v_1 \dots v_n \rangle$ è un sottospazio

2) Se $v_1 \dots v_n \in W \subset V$ W sottosp. di V
allora $\langle v_1 \dots v_n \rangle \subset W$

Cioè $\langle v_1 \quad v_n \rangle$ è il più piccolo SOTTOSP. CHE CONTIENE $v_1, \dots v_n$.

<u>dim</u>

- $0_V \in \underline{\langle v_1 \dots v_n \rangle}$

infatti se scelgo $\underline{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0}$
allora

$$\langle v_1 \dots v_n \rangle \ni \underline{0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n} = 0_V$$

- Se $\underline{u \in \boxed{\langle v_1 \quad v_n \rangle}}$ e $\underline{v \in \langle v_1 \quad v_n \rangle}$

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$

$u + v = a_1 v_1 + b_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + b_n v_n$

$= (a_1 + b_1) v_1 + \cdots + (a_n + b_n) v_n$

$\in \langle v_1 \dots v_n \rangle$

- Se $u \in \langle v_1 \quad v_n \rangle$ e $\lambda \in K$ $\lambda u \in \langle v_1 \quad v_n \rangle$

......

$v_i \in \boxed{\langle v_1 \dots v_n \rangle}.$

infatti se $a_1 = a_2 = \dots a_{i-1} = a_{i+1} = \dots = a_n = 0$

e $a_i = 1$

$v_i = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n$

$\in \langle v_1 \quad v_n \rangle.$