IL TEOREMA FONDAMENTALE

Chiamo teorema fondamentale dell'algebra lineare il teorema che afferma che tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Non è un nome convenzionale, non lo troverete enunciato allo stesso modo in un libro, è un nome però meritato. La dimostrazione di questo teorema che abbiamo dato a lezione e che trovate qui sotto, non è molto bella, ma spero sia più "concreta" e quindi più adatta a questo corso. Dimostreremo il teorema prima nel caso di K^m e poi per un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita.

IL CASO DI K^m

La dimostrazione del teorema fondamentale nel caso di K^m usa due fatti che abbiamo osservato parlando di sistemi lineari.

Sia A una matrice $m \times n$. Allora

1. Il sistema $Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se $\text{rango}(A) = n$.

2. Il sistema $Ax = b$ ha soluzione per ogni $b \in K^m$ se e solo se $\text{rango}(A) = m$.

Osserviamo che in ogni caso $\text{rango}\ A \leq n$ e $\text{rango}\ A \leq m$ quindi la condizione $\text{rango}\ A = n$ è equivalente alla condizione $\text{rango}\ A \geq n$. Similmente la condizione $\text{rango}\ A = m$ è equivalente a $\text{rango}\ A \geq m$.

Siano ora $v_1 \dots v_n \in K^n$, che pensiamo come vettori colonne e sia

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

la matrice $m \times n$ le cui colonne sono i vettori $v_1 \dots v_n$.

LEMMA

(a) $v_1 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\text{rango}(A) = n$

(b) $v_1 \dots v_n$ generano K^m se e solo se $\text{rango}(A) = m$

dim. La dimostrazione sia di (a) che di (b) si basa sui due fatti richiamati in precedenza e sull'osservazione che:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dimostriamo ⓐ. $v_1 \dots v_n$ linearmente indipendenti vuol dire che se $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ allora $x_1 = \dots = x_n = 0$ ovvero che

$$A x = 0$$

ha come unica soluzione $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e per il punto ① ricordato sopra questo vuol dire rango $(A) = n$

Dimostriamo ⓑ. $v_1 \dots v_n$ generatori di K^m vuol dire che $\forall\, b \in K^m$ $\exists\, x_1 \dots x_n$ tali che $b = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ ovvero che il sistema

$$A x = b$$

ha soluzione per ogni $b \in K^m$ e per il punto ② ricordato sopra questo vuol dire rango $A = m$.

#

TEOREMA FONDAMENTALE PER K^m

Siano $v_1 \dots v_n \in K^m$

ⓐ Se $v_1 \dots v_n$ sono una base allora $n = m$

ⓑ Se $v_1 \dots v_n$ sono lin. indip. allora $n \leq m$

ⓒ Se $v_1 \dots v_n$ sono generatori di K^m allora $n \geq m$

ⓓ Se $n = m$ allora $v_1 \dots v_m$ sono una base se e solo sono linearmente indipendenti e se e solo se sono generatori di K^m

dim. Sia $A = (v_1 \dots v_n)$ la matrice $m \times n$ introdotta in precedenza. Usando il lemma precedente abbiamo

ⓑ Se $v_1 \dots v_n$ lin. indip. allora $n =$ rango (A). In ogni caso rango $(A) \leq m$ quindi $n \leq m$.

ⓒ Se $v_1 \dots v_n$ generatori allora $m =$ rango (A) In ogni caso rango $(A) \leq n$ quindi $m \leq n$.

ⓐ Se $v_1 \dots v_n$ base allora sono generatori e linearmente indipendenti, quindi da ⓑ otteniamo $n \leq m$ e da ⓒ otteniamo $m \leq n$. Quindi $n = m$.

ⓓ Se $n = m$ allora osserviamo che le condizioni $v_1 \dots v_m$ lin. indip se e solo se rango $(A) = m$

$v_1 \dots v_m$ generano K^m se e solo se rango$(A) = m$

sono equivalenti. Ne ricaviamo che $v_1 \dots v_m$ generano K^m se e solo se sono lin. indipendenti.

In particolare le tre condizioni
- essere una base
- essere generatori di K^m
- essere lin. indip.

sono equivalenti in questo caso #/

IL TEOREMA FONDAMENTALE NEL CASO GENERALE

Dimostriamo ora il teorema fondamentale per spazi vettoriali di dimensione finita.

DEFINIZIONE Uno spazio vettoriale si dice di dimensione finita se esistono $v_1 \dots v_n \in V$ che generano V.

LEMMA (da un insieme di generatori si può estrarre una base)

ⓐ Se $v_1 \dots v_n$ generano V allora si può estrarre da $v_1 \dots v_n$ un sottoinsieme $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ che è una base di V

ⓑ Se V è di dimensione finita allora V ha una base.

OSSERVAZIONE. Nella nostra definizione di base è sottointeso finito, c'è un concetto più generale di base che nel corso non è stato introdotto, per trattare anche il caso di dimensione infinita.

dim. del lemma

ⓐ Se prendiamo una sottolista $v_{j_1} \dots v_{j_h}$ di $v_1 \dots v_n$ questa può generare V oppure no. Sia

$$\mathcal{A} = \{ (v_{i_1}, \dots, v_{i_h}) : \langle v_{i_1} \dots v_{i_h} \rangle = V \}$$

ovvero l'insieme delle sottoliste di $v_1 \dots v_n$ che generano V. Sicuramente $(v_1 \dots v_n) \in \mathcal{A}$, quindi $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Tra le sottoliste ne prendiamo una con il minor numero di elementi. Sia $v_{i_1} \dots v_{i_k}$. Quindi

- $\langle v_{i_1} \dots v_{i_k} \rangle = V$ perché $v_{i_1} \dots v_{i_k} \in \mathcal{A}$
- e se tolgo un elemento alla lista non genera più V perché $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ ha il minor numero possibile di elementi.

quindi $v_{i_1} \dots v_{i_k}$ è un insieme minimale di generatori e per quello che abbiamo già dimostrato è quindi una base

ⓑ Siano $v_1 \dots v_n$ generatori di V. Per il punto ⓐ esiste una sottolista di $v_1 \dots v_n$ che è una base di V #

Quindi gli spazi vettoriali di dimensione finita sono esattamente gli spazi vettoriali che hanno una base. Dimostreremo ora per questi spazi vettoriali un analogo del teorema che abbiamo dimostrato per K^m. Il teorema seguirà da ciò che abbiamo dimostrato per K^m e dal seguente lemma.

LEMMA Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali

ⓐ Se F è iniettiva e $v_1 \dots v_n$ sono lin. indipendenti allora $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono lin. indip.

ⓑ Se F è surgettiva e $v_1 \dots v_n$ sono generatori di V allora $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono generatori di W.

ⓒ Se F è iniettiva e surgettiva e $v_1 \dots v_n$ è una base allora $F(v_1) \dots F(v_n)$ è una base.

dim

ⓐ Dobbiamo dimostrare che se

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0$$

allora $a_1 = \dots = a_n = 0$. Osserviamo che

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = F(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

quindi dall'iniettività di F segue che se

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = 0$$

allora $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ e dalla lineare indipendenza di $v_1 \dots v_n$ segue che $a_1 = \dots = a_n = 0$.

ⓑ Sia $w \in W$, voglio dimostrare che $\exists\, b_1 \dots b_n$ tali che

$$w = b_1 F(v_1) + \dots + b_n F(v_n).$$

Dalla surgettività di F segue che $\exists\, v \in V$ e $F(v) = w$. Dal fatto che $v_1 \dots v_n$ generano V $\exists\, b_1 \dots b_n$ e

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

e dalla linearità di F segue che

$$w = F(v) = b_1 F(v_1) + \dots + b_n F(v_n)$$

(c) Questo punto segue da (a) e da (b) #

TEOREMA (TEOREMA FONDAMENTALE IN DIMENSIONE FINITA)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $u_1, \dots u_m$ una base di V. Siano $v_1, \dots v_n \in V$

(a) Se $v_1 \dots v_n$ sono una base di V allora $n = m$

(b) Se $v_1 \dots v_n$ sono lin. indip. allora $n \leq m$

(c) Se $v_1 \dots v_n$ generano V allora $m \leq n$

(d) Se $n = m$ allora $v_1 \dots v_m$ sono una base di V se e solo se sono lin. indip. se e solo se sono generatori di V

dim

Sia $F : V \longrightarrow K^m$ l'applicazione definita rispetto a prendere le coordinate rispetto alla base $u_1, \dots, u_m$; cioè

$$F(v) = [v]_{u_1, \dots u_m}$$

Come abbiamo già osservato F è iniettiva e surgettiva. In particolare le affermazioni (a), (b) (c) (d) seguono dal lemma precedente e dalle analoghe affermazioni del teorema fondamentale per K^m applicate ai vettori

$$w_1 = F(v_1); \dots ; w_n = F(v_n).$$

Per esempio supponiamo di voler dimostrare (a). Per il lemma, punto (c), $w_1 \dots w_n$ sono una base di K^m e per il teorema fondamentale dimostrato per K^m, punto (a) segue $n = m$. #

DEFINIZIONE

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $v_1 \dots v_m$ una base di V allora diciamo che la dimensione di V è m e scriviamo

$$\dim V = m$$

Per il teorema precedente questo numero non dipende dalla base scelta.

ESEMPI

① $\dim K^m = m$ infatti $e_1 \dots e_m$ è una base di K^m

② $\dim Mat_{m\times n}(K) = m\cdot n$ infatti E_{ij} con $i = 1 \dots m$ $j = 1 \dots n$ è una base di $Mat_{m\times n}(K)$

③ $\dim K[t]_{\le n} = n+1$ infatti $1, t, t^2, \dots, t^{n+1}$ è una base di $K[t]_{\le n}$

Una proprietà importante degli spazi vettoriali di dimensione finita, che è intuitiva ma che non è immediatamente chiara dalla definizione è che un sottospazio di uno spazio di dimensione finita ha a sua volta dimensione finita.

TEOREMA

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale.
Allora W ha dimensione finita e $\dim W \le \dim V$.
Inoltre $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$

dim Se $W = 0$ è ovvio. Se $W \ne 0$.
Dimostriamo prima che $\dim W$ è finita.
Procediamo p.a. supponiamo che W non sia di dimensione finita. Allora costruisco una successione di vettori

$$v_1, v_2, \dots v_n \dots \in W$$

linearmente indipendenti. La successione la costruisco in questo modo:

$v_1 \in W$ e $v_1 \ne 0$
una volta costruiti $v_1 \dots v_{n-1}$ osservo che poiché per ipotesi assurda W non ha dimensione finita allora $W \ne \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$ quindi $\exists\, v_n \in W \setminus \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$. Per quanto osservato in una lezione precedente $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti

In particolare se $m = \dim V$ allora ho costruito $v_1, \dots, v_{m+1} \in V$ linearmente indipendenti che è contro il teorema fondamentale, punto ⑥.

Quindi W ha dimensione finita e sia $v_1 \dots v_n$ una base di W. Allora $v_1 \dots v_n$ sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi sempre per il teorema fond., punto (b) si ricava $n \leq m$ ovvero $\dim W = \dim V$.

Se infine $n = m$ allora $v_1; \dots; v_m$ sono vettori lin. indip. di V e quindi per il punto (d) sono una base di V. Quindi

$$W = \langle v_1 \dots v_n \rangle = V.$$

#

L'ultimo risultato che vogliamo dimostrare e di cui faremo spesso uso nel seguito è un analogo del lemma che abbiamo dimostrato sopra che dice che da un insieme di generatori si può estrarre una base. Dimostreremo che un insieme di vettori linearmente indipendenti si può completare ad una base. La dimostrazione è molto simile a quella del teorema appena enunciato.

LEMMA (ogni lista di vettori lin. indip. si può completare ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\dim V = m$.

Siano $v_1 \dots v_n \in V$ dei vettori linearmente indipendenti. Allora

esistono $v_{n+1}, \dots, v_m \in V$ tali che $v_1 \dots v_m$ è una base.

dim. L'idea della dimostrazione è la stessa del teorema precedente. Se $\langle v_1 \dots v_n \rangle = V$ abbiamo finito altrimenti aggiungiamo un elemento in $V \setminus \langle v_1 \dots v_n \rangle$, grazie al teorema fondamentale questo procedimento termina. Ne organizziamo l'esposizione in modo diverso.

Osserviamo che per il teorema fondamentale (b), $\ell = m - n \geq 0$ e procediamo p.i. su ℓ.

$\boxed{\text{Se } \ell = 0}$ $n=m$ segue dal teorema fondamentale (d)

$\boxed{\ell - 1 \Rightarrow \ell \text{ per } \ell \geq 1}$ $n = m - \ell < m$ quindi $V \langle v_1 \dots v_n \rangle \neq V$ altrimenti V ha una base con $n < m$ elementi. Sia allora $v_{n+1} \in V \setminus \langle v_1 \dots v_n \rangle$ Allora $v_1 \dots v_{n+1}$ sono linearmente indipendenti e

$$m - (n+1) = \ell - 1.$$

Allora per ipotesi induttiva esistono $v_{n+2}; \dots; v_m$ tali che

$$v_1 \dots v_n \; v_{n+1} \; v_{n+2} \; v_m \text{ è una base}$$

#