ALCUNE CONSEGUENZE DEL TEOREMA FONDAMENTALE

Se A è una matrice $m \times n$ nel nostro studio dei sistemi lineari abbiamo definito rango(A) come $n - n°$ variabili libere. Abbiamo osservato che la definizione

$$\text{rango}(A) = n$$

e

$$\text{rango}(A) = m$$

e

$$\text{rango}(A) = 0$$

erano ben date ma per i casi intermedi $0 < \text{rango}(A) < n, m$ la nostra definizione poteva essere non univoca. Poniamo finalmente una toppa a questo problema.

Sia A una matrice $m \times n$ e sia $L_A : K^n \longrightarrow K^m$ l'applicazione lineare associata. Nel seguito mostriamo che

$$n° \text{ variabili libere} = \dim N(L_A)$$

$$\text{rango}(A) = \dim \operatorname{Im} L_A$$

della seconda affermazione daremo due dimostrazioni, la prima più sintetica ed elegante, la seconda più costruttiva. In particolare ne risulta che rango(A) ha un significato intrinseco.

DESCRIZIONE DI $N(L_A)$

$N(L_A)$ è esattamente uguale all'insieme delle $x \in K^n$: $A \cdot x = 0$.

Risolviamo il sistema. Sappiamo che possiamo riscrivere le soluzioni nella forma

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_h} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{pmatrix}$$

dove $x_{i_1} \dots x_{i_h}$ sono le variabili dipendenti e $x_{j_1} \dots x_{j_k}$ sono le variabili libere.

Per semplicità notazionale indico le variabili dipendenti con $y_1 \dots y_h$ e quelle libere con $z_1 \dots z_k$.

Se poniamo $z_i = 1$ e $z_j = 0$ per $j \neq i$ e determiniamo le y di conseguenza otteniamo una particolare soluzione del sistema $v_i \in K^m$. Abbiamo già osservato che ogni soluzione del sistema si scrive in modo unico nella forma

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \qquad \text{con} \quad a_i \in K$$

ovvero $v_1 \dots v_k$ sono una base di $N(L_A)$. Quindi

$$\dim N(L_A) = n^\circ \text{ variabili libere}$$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE E DEFINIZIONE GENERALE DI RANGO

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F: V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Allora

$$\dim V = \dim N(F) + \dim \operatorname{Im} F$$

dim

Sia $v_1 \dots v_a$ una base di $N(F)$ in particolare sono lin. indip.

Possiamo completare $v_1 \dots v_a$ ad una base $v_1 \dots v_a\ u_1 \dots u_b$ di V.

Quindi $\dim V = a + b$.

Sia $w_i = F(u_i)$.

Dimostriamo che $w_1 \dots w_b$ sono una base di $\operatorname{Im} F$.

- Dimostriamo che $w_1 \dots w_b$ generano $\operatorname{Im} F$.

  Infatti se $w \in \operatorname{Im} F$ allora $w = F(v)$ per qualche $v \in V$ e

  $$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_a v_a + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_b u_b$$

  quindi

  $$w = F(v) = \alpha_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{F(v_1)}} + \dots + \alpha_a \underset{0}{\underset{\parallel}{F(v_a)}} + \beta_1 \underset{w_1}{\underset{\parallel}{F(u_1)}} + \dots + \beta_b \underset{w_b}{\underset{\parallel}{F(u_b)}}$$

  $$= \beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b$$

- Dimostriamo che $w_1 ; \dots ; w_b$ sono lin. indip.

  Sia $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b = 0$

Allora $\quad F(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_b w_b = 0$

quindi $u = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b \in N(F)$ quindi esistono

$\alpha_1, \ldots \alpha_a$ tali che

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_a v_a$$

ovvero

$$-\alpha_1 v_1 \cdots - \alpha_a v_a + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_b u_b = 0$$

Essendo $v_1, \ldots u_b$ lin. indip. se ricaviamo che tutti i coefficienti sono zero e in particolare

$$\beta_1 = \cdots = \beta_b = 0$$

dimostrando così che $w_1, \ldots w_b$ sono lin. indip.

#

COROLLARIO

Sia A una matrice $m \times n$. Allora $\text{rango}(A) = \dim \text{Im} L_A$

dim

Dalla definizione abbiamo $\text{rango}(A) = n -$ n° variabili libere

Dalla proposizione della sezione precedente ricaviamo

$$\text{rango}(A) = n - \dim N(L_A)$$

e dal teorema della dimensione applicato a $L_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$\text{rango}(A) = \dim K^n - \dim N(L_A) = \dim \text{Im} L_A$$

#

DEFINIZIONE

Sia $F: V \longrightarrow W$ lineare e sia V di dimensione finita. Allora definiamo

$$\text{rango}(F) = \dim(\text{Im} F)$$

Per il corollario precedente abbiamo che se $F = L_A$ $\text{rango}(F) = \text{rango}(A)$.

DESCRIZIONE DI $\mathrm{Im}\, L_A$

Diamo ora una dimostrazione più diretta del fatto che rango A è uguale a $\dim \mathrm{Im}\, L_A$, spiegando come costruire una base di $\mathrm{Im}\, L_A$ che ha esattamente rango (A) elementi.

Siano $u_1 \dots u_n$ le colonne della matrice A. Abbiamo visto che

$$\mathrm{Im}\, L_A = \langle u_1 \dots u_n \rangle .$$

Consideriamo ora il sistema $A \cdot x = 0$. Risolviamo il sistema e siano $x_{i_1} \dots x_{i_h}$ le variabili dipendenti e $x_{j_1} \dots x_{j_k}$ le variabili libere. Allora

(*) $v_{i_1} \dots v_{i_h}$ è una base di $\mathrm{Im}\, L_A$

e in particolare perché $h = \text{rango}(A)$ ne ricaviamo un'altra volta che $\text{rango}(A) = \dim \mathrm{Im}\, L_A$.

Illustriamo la dimostrazione di (*) con un esempio "quasi" numerico. Supponiamo $n = 5$ e che $h = 2$ con $i_1 = 1$ e $i_2 = 3$. quindi avremo che le soluzioni del sistema si possono descrivere come le $(x_1 \dots x_5)$:

$$\begin{cases} x_1 = a_2 x_2 + a_4 x_4 + a_5 x_5 \\ x_3 = b_2 x_2 + b_4 x_4 + b_5 x_5 \end{cases}$$

consideriamo le tre soluzioni che si ottengono con

$x_2 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0 \qquad \begin{pmatrix} a_4 \\ 0 \\ b_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \qquad \begin{pmatrix} a_5 \\ 0 \\ b_5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi da $A \cdot x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_5 u_5$ ricaviamo

$a_2 u_1 + u_2 + b_2 u_3 = 0$ ovvero $u_2 = -a_2 u_1 - b_2 u_3$

$a_4 u_1 + u_4 + b_4 u_3 = 0$ " $u_4 = -a_4 u_1 - b_4 u_3$

$a_5 u_1 + u_5 + b_5 u_3 = 0$ " $u_5 = -a_5 u_1 - b_5 u_3$

quindi $\quad \mathrm{Im}\, L_A = \langle u_1, u_2 \dots u_5 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle$

Rimane da dimostrare che u_1 e u_3 sono lin. indip.

Se avessimo $\alpha u_1 + \beta u_3 = 0$ allora $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sarebbe

una soluzione del sistema. $A \cdot x = 0$ con $x_2 = x_4 = x_5 = 0$

ma in tal caso abbiamo che $\alpha = x_1 = 0$ e $\beta = x_3 = 0$.