IL PRODOTTO SCALARE, AREA E VOLUMI DI TRIANGOLI E TETRAEDRI IN $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

QUESTE NOTE RACCOLGONO ALCUNE COSE FATTE A ESERCITAZIONI MA DI NOTEVOLE IMPORTANZA.

AFFRONTEREMO IL PRODOTTO SCALARE IN MAGGIORE GENERALITÀ E DETTAGLIO NEL SECONDO SEMESTRE, COME AFFRONTEREMO IL PROBLEMA DEL VOLUME QUANDO FAREMO I DETERMINANTI.

QUESTE NOTE HANNO DUE SCOPI

- CREARE UN PONTE TRA QUELLO CHE STATE FACENDO A FISICA E CHE ALCUNI DI VOI HANNO FATTO ALLE SUPERIORI E QUELLO CHE NOI FAREMO SOLO PIÙ AVANTI
- POTER FARE, ANCHE IN QUESTA PRIMA PARTE DEL CORSO DEGLI ESERCIZI UN PO' PIÙ CONCRETI E GEOMETRICI.

VOGLIAMO TROVARE DELLE FORMULE SEMPLICI CHE CI PERMETTANO DI CALCOLARE

- IL PRODOTTO SCALARE (PER $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$)
- L'AREA DEL TRIANGOLO INDIVIDUATA DA TRE PUNTI (PER $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$)
- IL VOLUME DEL TETRAEDRO INDIVIDUATO DA QUATTRO PUNTI. (PER $\mathbb{R}^3$)

NEL CASO DEI DUE PROBLEMI RELATIVI A $\mathbb{R}^2$ ABBIAMO GIÀ TROVATO LE SOLUZIONI USANDO $\mathbb{C}$ E LE TROVATE NELLE ULTIME NOTE SU $\mathbb{C}$.

QUINDI QUI CI LIMITIAMO A $\mathbb{R}^3$

- DISTANZA: SE $x=(x_1 \ x_2 \ x_3)$ e $y=(y_1 \ y_2 \ y_3) \in \mathbb{R}^3$

  ALLORA PER IL TEOR. DI PITAGORA

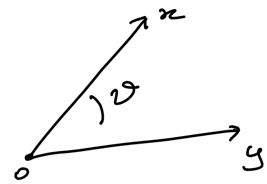
  APPLICATO 2 VOLTE ABBIAMO

$$\text{dist}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

Pongo $\|x\| = \text{dist}(0, x)$

- **PRODOTTO SCALARE**. RICORDO CHE IL PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI È DEFINITO COME

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \vartheta$$

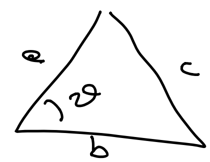


DOVE ϑ È L'ANGOLO IN FIGURA

PROPOSIZIONE

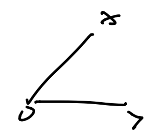
$$X \cdot Y = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3$$

dim Ricordo che se a, b, c sono i lati di un triangolo abbiamo



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta$$

DOVE ϑ È L'ANGOLO IN FIGURA. SE APPLICO QUESTA FORMULA AL CASO DI



OTTENGO

$$\text{dist}(x, y)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\, x \cdot y$$

DA CUI

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\, x \cdot y$$

SEMPLIFICANDO OTTENGO $X \cdot Y = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3$

#

LA FORMULA SI PUÒ USARE PER CALCOLARE L'ANGOLO ϑ INFATTI DALLA DEFINIZIONE DI $\cdot$ RICAVIAMO:

$$\cos \vartheta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}$$

"BILINEARITÀ DEL PRODOTTO SCALARE"

IL PRODOTTO SCALARE HA ALCUNE PROPRIETÀ ALGEBRICHE SPESSO UTILI. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^3$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$:

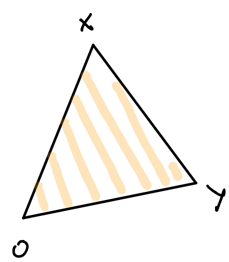
$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x \cdot (\lambda y) = \lambda\,(x \cdot y)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

LE PRIME DUE SEGUONO SIA DALLA DEFINIZIONE CHE DALLA FORMULA APPENA TROVATA. LA TERZA NON È OVVIA DALLA DEFINIZIONE MA È SEMPLICE DEDURLA DALLA FORMULA APPENA TROVATA.

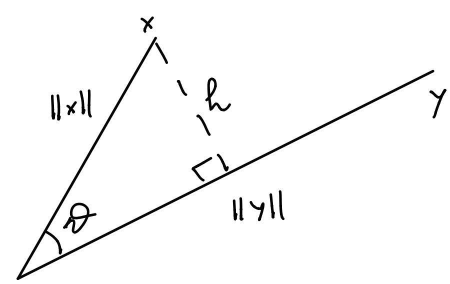
- AREA DI UN TRIANGOLO



CONSIDERIAMO IL TRIANGOLO DI VERTICI O, $x = (x_1, x_2, x_3)$ E $y = (y_1, y_2, y_3)$. SIA A LA SUA AREA ALLORA

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$

dimostrazione



CON LE NOTAZIONI IN FIGURA ABBIAMO

$$A = \frac{1}{2}\,\|y\|\,h$$

E $\quad h = \|x\| \sin(\vartheta)$ QUINDI

def di $x \cdot y$

$$A = \frac{1}{2}\,\|x\|\,\|y\|\,\sqrt{1 - (\cos\vartheta)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\|x\|\,\|y\|\,\sqrt{1 - \frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2}$$

SVILUPPANDO TROVO LA FORMULA CERCATA

#

• PRODOTTO VETTORIALE O PRODOTTO ESTERNO

SE DATI $x=(x_1\ x_2\ x_3)$ E $y=(y_1\ y_2\ y_3)$ DEFINIAMO

$$x\wedge y=\left(x_2y_3-x_3y_2;\ x_3y_1-x_1y_3;\ x_1y_2-x_2y_1\right)$$

DALLA FORMULA PRECEDENTE RICAVIAMO

$$2A=\|x\wedge y\|=\|x\|\,\|y\|\sin\vartheta$$

IL VETTORE $x\wedge y$ COSÌ DEFINITO SI CHIAMA IL PRODOTTO VETTORIALE O ESTERNO DI x E y. VERIFICA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

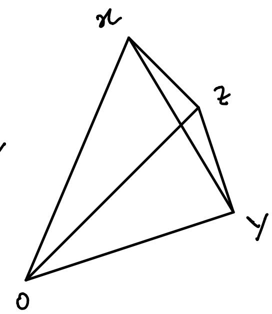
- $x\wedge(y+z)=x\wedge y+x\wedge z$
- $x\wedge y=-y\wedge x$
- $x\wedge(\lambda y)=\lambda(x\wedge y)$
- $x\cdot(x\wedge y)=y\cdot(x\wedge y)=0$

LA VERIFICA DI QUESTE PROPRIETÀ È FORSE UN PÒ LUNGA, MA SEMPLICE, USANDO LA FORMULA CON LA QUALE È DEFINITO $\wedge$. L'ULTIMA DI QUESTE PROPRIETÀ IN PARTICOLARE CI DICE CHE $x\wedge y$ È ORTOGONALE A x E A y.

- VOLUME DI UN TETRAEDRO

VOGLIAMO TROVARE UNA FORMULA SEMPLICE CHE ESPRIMA IL VOLUME V DEL TETRAEDRO O, X, Y, Z

DOVE $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$.



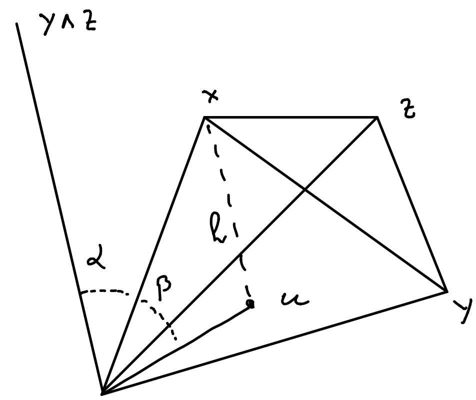
PROPOSIZIONE

$$V = \frac{1}{6} \left| X \cdot (Y \wedge Z) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \Big(X_1 Y_2 Z_3 - X_1 Z_3 Y_1 + X_2 Y_3 Z_1 - X_2 Y_1 Z_3 + X_3 Y_1 Z_2 - X_3 Z_1 Y_2 \Big)$$

dimostrazione

SIA A L'AREA DEL TRIANGOLO $O Y Z$. E SIA h L'ALTEZZA DEL TETRAEDRO RISPETTO A QUESTA BASE



ABBIAMO

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

INOLTRE ABBIAMO $A = \frac{1}{2} \| Y \wedge Z \|$ E

SE u È LA PROIEZIONE DI X SULLA BASE E β È L'ANGOLO XOu ABBIAMO $\beta \in [0, \pi]$ E

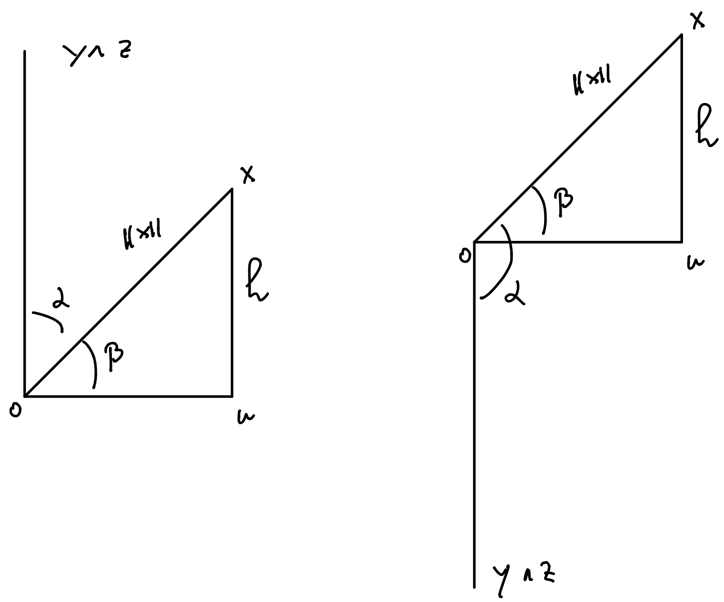
$$h = \|x\| \sin\beta.$$

QUINDI

$$V = \frac{1}{6} \|x\| \, \|y \wedge z\| \sin\beta.$$

ORA SAPPIAMO CHE $y \wedge z$ È ORTOGONALE AL PIANO OYZ. QUINDI IL SEGMENTO CHE UNISCE O E $y \wedge z$ È PARALLELO AL SEGMENTO CHE UNISCE u E x

QUINDI SIAMO IN UNO DEI DUE CASI SEGUENTI:



NEL PRIMO $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, NEL SECONDO

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

IN OGNI CASO $\sin\beta = |\cos\alpha|$

QUINDI $V = \frac{1}{6} \|x\| \, \|y \wedge z\| \, |\cos\alpha| = \frac{1}{6} \left| x \cdot (y \wedge z) \right|$

E ESPANDENDO SI TROVA LA SECONDA FORMULA #