Compito di Geometria e algebra lineare del 10 settembre 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Mettete il vostro nome su tutti i fogli. Consegnate sia la bella che la brutta che il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Se un foglio che consegnate non volete che sia corretto scriveteci "brutta" in cima. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete 3 ore di tempo a disposizione.

Esercizio 1.

a) Siano U, V, W tre sottospazi di uno spazio vettoriale E. Cosa vuol dire che U, V, W sono in somma diretta?

b) In generale è vero che se U, V, W sono sottospazi di uno spazio vettoriale E allora $(U + V) \cap W = U \cap W + V \cap W$? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia $F : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da

$$F(p(t)) = p''(t^2 - 1)$$

dove p'' indica la derivata seconda. [$p''(t^2 - 1)$ non indica la moltiplicazione tra p'' e $(t^2 - 1)$ ma il polinomio p'' valutato in $t^2 - 1$)].

a) Si determini la forma di Jordan di F.

b) Si determini un sottospazio W di V di dimensione 3 tale che $F(W) \subset W$ e $F|_W : W \longrightarrow W$ si diagonalizzi.

Esercizio 3. Sia θ l'angolo compreso tra $\pi/2$ e π radianti il cui coseno è uguale a $-5/7$. Sia r la retta passante per i punti $P = (0, 3, 1)$ e $Q = (1, 1, 2)$. Sia $f(x) = Ax + b$ una rotazione di $\mathbb{R}^3$ di angolo θ attorno alla retta r.

a) Si descriva chiaramente che procedimento si intende utilizzare per calcolare A e b senza effettuare i conti. È importante che la spiegazione sia chiara. (2 punti)

b) Si determinino A e b. È importante che il risultato sia di A che di b sia corretto. (6 punti, la determinazione della sola matrice A vale 1 punto, e della sola b zero)

Esercizio 4. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali e sia U il sottospazio di E delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Sia

$$S = \begin{pmatrix} c & d \\ d & e \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica e sia g_S il prodotto scalare su E definito da

$$g_S(X, Y) = Tr(X^t\, S\, Y).$$

a) Si determini la segnatura di g_S se $c = d = e = 1$;

b) Si scelga S in modo che g_S abbia segnatura $(2, 2, 0)$ e U sia un sottospazio isotropo (ovvero g_S ristretto a $U \times U$ è zero).

c) Sia $W = \{(c, d, e) \in \mathbb{R}^3 \, : \, g_S$ ristretto a U sia zero$\}$. Si dimostri che W è un sottospazio vettoriale e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 1. a) U, V, W sono in somma diretta se $u + v + w = 0$ con $u \in U$, $v \in V$ e $w \in W$ implica $u = v = w = 0$.

b) In generale non è vero. Prendiamo $E = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}e_1$, $V = \mathbb{R}e_2$ e $W = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. In questo caso $(U + V) \cap W = W$ e $U \cap W + V \cap W = 0$.

Esercizio 2. a) Sia $A = [F]^{1,t,t^2,t^3,t^4}_{1,t,t^2.t^3,t^4}$ la matrice associata ad F rispetto alla base standard di V. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è quindi uguale a $t^4(12 - t)$. La molteplicità algebrica di 0 è 4 la matrice ha rango 3 quindi 0 ha molteplicità geometrica uguale a 2. Da queste informazioni ricaviamo che la forma di Jordan è una delle due seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \textit{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Nel primo caso il rango di A^2 è 2 e nel secondo è 1 Per distinguere quale sia quella giusta calcoliamo quindi A^2 ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 quindi la forma di Jordan giusta è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

b) Se W ha una base di autovettori, questi saranno, in particolare degli elementi di V che sono autovettori di F. In particolare gli autovalori possibili sono 0 che ha molteplicià geometrica 2 e 12 che ha molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Gli autovettori di autovalore zero sono gli elementi non nulli del nucleo e quindi una loro base è data da e_1 ed e_2. Per trovare un autovettore di autovalore 12 dobbiamo risolvere $F(p) = 12p$, ovvero $(F - 12id)(p)$.

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

da cui $u = y = 0$ e

$$-12x + 2z + 12v = 0 \qquad z + 2v = 0.$$

Per esempio $v = 1$, $z = -2$, $x = 2/3$. Quindi lo spazio generato da $1, t$ e $t^4 - 2t^2 + \frac{2}{3}$ ha le proprietà richieste.

Esercizio 3. a) Calcolo la matrice associata ad una rotazione g di angolo θ attorno alla retta r_0 parallela a r e passante per l'origine. Per calcolare tale matrice determino una base ortonormale u_1, u_2, u_3 nella quale il primo vettore genera la retta r_0. In questa base la matrice associata alla rotazione sarà uguale a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/7 & -2\sqrt{6}/7 \\ 0 & 2\sqrt{6}/7 & -5/7 \end{pmatrix}.$$

Determino poi la matrice associata alla rotazione nella base standard effettuando il cambiamento di base. La rotazione f si può infine ottenere come

$$f = \tau^{-1} \circ g \circ \tau$$

dove τ è una traslazione che porta r in r_0, per esempio $\tau(v) = v - P$ e quindi $\tau^{-1}(v) = v + P$.

b) La retta r_0 è la retta $\mathbb{R}u$ con $u = Q - P = (1, -2, 1)$. Posso quindi scegliere $u_1 = u/\sqrt{6}$. I vettori (x, y, z) ortogonali a u sono i vettori che verificano $x-2y+z = 0$, per esempio $v = (1, 1, 1)$ e posso quindi scegliere $u_2 = v/\sqrt{3}$. I vettori ortogonali a u e a v sono i vettori che verificano $x - 2y + z = 0$ e $x + y + z = 0$ ovvero $x + z = y = 0$ per esempio $w = (1, 0, -1)$. Posso quindi scegliere $u_3 = w/`sqrt2$. Avremo quindi $[g]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} = B$. Ricaviamo

$$A = [g]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3} = [Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} \cdot [g]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} \cdot [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{u_1,u_2,u_3}.$$

Dal calcolo di u_1, u_2, u_3 ricaviamo

$$[Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Poiché la base è ortonormale ricaviamo anche $[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{u_1,u_2,u_3} = \left([Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3}\right)^t$ e moltiplicando le matrici otteniamo

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si noti che le rotazioni attorno alla retta r di angolo θ sono 2, l'altramatrice possibile era la trasposta di questa. Infine per calcolare b procediamo come abbiamo detto sopra

$$f(v) = g(v - P) + P = A \cdot v + P - A \cdot P$$

da cui

$$b = P - A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.

$$g_S\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix}\right) = cxx' + cyy' + ezz' + eww' + dxz' + dx'z + dyw' + dwy'$$

In particolare la matrice associata a g_S rispetto alla base standard di E è la matrice

$$\begin{pmatrix} c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ d & 0 & e & 0 \\ 0 & d & 0 & e \end{pmatrix}.$$

a) Per $c = d = 1$ la matrice associata ha rango 2 quindi anche $i_0 = 4 - 2 = 2$. Inoltre la forma ristretta al sottospazio generato dai primi due vettori della base è chiaramente definita positiva quindi $i_+ \geqslant 2$. La segnatura è quindi $(2, 0, 2)$.

b e c) Determiniamo per quali S la forma g_S ristretta a UxU sia zero. Questo sappiamo essere equivalente a richiedere $g_S(u,u) = 0$ per ogni $u \in U$. Sviluppando $g_S(u,u)$ per

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} g_S(u,u) &= ca^2 + cb^2 + eb^2 + ea^2 + dxz' + dx'z + dyw' + dwy' = \\ &= c(a^2+b^2) + e(a^2+b^2) + d(-2ab+2ab) = (c+e)(a^2+b^2) \end{aligned}$$

Quindi g_S è zero su U se e solo se $c = -e$. In particolare W è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ (punto c)

Se scegliamo $d = 0$ e $c = 1$ e $e = -1$ vediamo che la matrice associata a g_S è diagonale e la segnatura risulta essere uguale a $(2,2,0)$ come richiesto (punto b).