1. Richiami

Questi esercizi riguardano argomenti che nel corso sono stati solo velocemente richiamati durante la prima settimana e che il corso presuppone noti dalle superiori. Si tratta di qualche nozione di calcolo proposizionale, di insiemistica, di trigonometria e coordinate polari. Agli esercizi che trovate sotto potete aggiungere gli esercizi 1,2,3,4,25,26,28,29,31 del capitolo 1 del libro Analisi Matematica ABC o gli esercizi sui richiami di trigonometria e insiemi del libro "Un primo corso di analisi matematica".

Esercizio 1. In una classe di Ingegneria meccanica di 250 studenti tutti hanno almeno dato un esame tra analisi, geometria e fisica al primo appello utile. 150 hanno dato analisi, 100 geometria, 75 fisica, 25 sia geometria che analisi e 15 tutti e tre gli esami. Gli studenti che hanno dato sia geometria che fisica hanno dato anche analisi. Quanti sono gli studenti che hanno dato almeno due esami?

Esercizio 2. Sia

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9 \text{ o } x^2 = 16\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 6, 7\}$$

Si descrivano gli insiemi

$$A \setminus B \qquad C \times (A \setminus B) \qquad (A \times B) \cap (C \times B).$$

elencandone gli elementi.

Esercizio 3. Negare le seguenti frasi:

ogni giorno dell'anno piove;
esiste un uomo nato a Livorno a cui piace Pisa.

Esercizio 4. Determinare le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari

$$\rho = 5, \alpha = 3\pi/2 \qquad \rho = 3, \alpha = 5\pi/4 \qquad \rho = 2, \alpha = -\pi/3 \qquad \rho = 4, \alpha = -\pi/6$$

Esercizio 5. Determinare le coordinate polari dei punti che hanno le seguenti coordinate cartesiane

$$(-2, -2), \qquad (3, -3\sqrt{3}), \qquad (-1, 1)$$

Numeri complessi

Esercizio 6. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione.

Esercizio 7. Si dimostri che esistono infiniti numeri primi procedendo nel seguente modo: si supponga per assurdo che siano in numero finito e che siano $p_1, \ldots, p_n$ si consideri il numero $m = p_1 \cdots p_n + 1$ e si osservi che questo numero non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti.

Esercizio 8. Calcolare $(1 + i)^2$. Calcolare $(3 + 4i) \cdot (3 - 2i)$.

Esercizio 9. Calcolare parte reale e parte immaginaria del reciproco di $(1 + 7i)$ e di $(1 + i)$.

Esercizio 10. Verificare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ e che $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

Esercizio 11. Calcolare le radici quarte di -16. Calcolare le radici ottave di -1. [si consiglia di utilizzare le coordinate polari]

Esercizio 12. Risolvere l'equazione $t^2 + 2t + 10 = 0$. Calcolare parte reale e parte immaginaria degli z tali che $z^2 = 5 + 12i$.

Esercizio 13. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$. [si consiglia di utilizzare le coordinate polari]

Esercizio 14. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

Esercizio 15. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{|z - i|}{|z + i|} = 2.$$

Esercizio 16. Si verifichi che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$
$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

Esercizio 17. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 18. Verificare che per ogni numero reale θ,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Esercizio 19. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z - \bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 20. Calcolare $(1-i)^{24}$. Risolvere $z^3 = arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$ e $z|z| = 2\,Re\,(z)$.

Esercizio 21. Siano a, b, c, d quattro numeri complessi. Il loro birapporto è definito come

$$bir(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

Fissati tre punti distinti a, b, c nel piano complesso, non allineati mostrare che il luogo degli z tali che $bir(a,b,c,z)$ è un numero reale è il cerchio passante per a, b, c.

Esercizio 22. Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

Esercizio 23 (Daddi)**.** Si determini il valore del parametro reale k in modo che l'equazione $z^2 + (3 + k\,i)\,z = 8 - 9\,i$ abbia, tra le sue soluzioni, il numero complesso $2 - i$. Si determini poi l'altra soluzione dell'equazione.

Esercizio 24 (Daddi)**.** Pierino, dopo vari anni di tentativi poco fruttuosi, si sta finalmente appassionando alla matematica; purtroppo oggi ha perso il foglio sul quale aveva scritto gli appunti della lezione.
Appena arrivato a casa, prova a ricostruire un esercizio svolto dal professore; si ricorda che si trattava di determinare le soluzioni di un'equazione della forma $2\,z^3 + ...\,z^2 + ...\,z + ... = 0$, dove al posto dei puntini ci sono dei numeri reali. Pierino ricorda anche che, tra le soluzioni dell'equazione, ci sono -2 e $-1 + 4\,i$.
Si dica qual l'equazione che il professore ha scritto alla lavagna.

Esercizio 25 (Daddi)**.** Assegnata l'equazione

$$3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{368} z - 18 + \frac{k}{z} = 0$$

dove k un parametro reale, si determinino gli eventuali valori di k in modo che le soluzioni siano non reali ed abbiano modulo uguale a $\sqrt{10}$.

Esercizio 26 (Daddi)**.** Tra i numeri complessi della forma

$$z = k + 1 + i\,(2\,k - 3)$$

dove k un numero reale, determinare quello avente modulo minimo.

Esercizio 27 (Daddi)**.** Si disegni nel piano complesso l'insieme rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} |\mathrm{Im}(z - 2 + 4\,i)| \leqslant 1 \\ |z - 1 + 3\,i| > 3\,. \end{cases}$$

Esercizio 28. Si trovi una formula per l'ennessimo termine della successione x_n definita nel modo seguente:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}.$$

Matrici

NOTA BENE LA MAGGIOR PARTE DEGLI ESERCIZI CHE ASSEGNEREMO DA ORA IN POI LI TROVERETE SUL LIBRO DI TESTO (GEOMETRIA 1 DI E.SERNESI). PER SAPERE QUALI SONO GLI ESERCIZI ASSEGNATI OGNI SETTIMANA SI CONSULTI IL DIARIO DELLE LEZIONI.

Esercizio 29. È vero che se A e B sono matrici 2×2 e $A \cdot B = 0$ allora $A = 0$ o $B = 0$. Dimostrare che è vero o esibire un controesempio.

Esercizio 30. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Esercizio 31. Sia data la matrice a coefficienti complessi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo che esista una matrice 2×2, B tale che $A \cdot B = I_2$. Si dimostri che $ad - bc \neq 0$ e che B è uguale alla matrice scritta nell'esercizio precedente.

Esercizio 32. Si disegni lo schema di una rete e si scriva la matrice associata secondo quanto spiegato in classe.

Esercizio 33. Dimostrare che se la matrice A ammette una inversa destra allora ogni sistema $Ax = b$ ammette almeno una soluzione.

Esercizio 34. Fare un esempio di una matrice A che ammette una inversa sinistra e di un vettore b tale che il sistema $Ax = b$ non ha soluzione.

Esercizio 35. Dimostrare che $(AB)^t = B^t A^t$ e che $(A + C)^t = A^t + C^t$.

Esercizio 36. Sia A una matrice $m \times m$ invertibile. Dimostrare che A^t è invertibile e che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Esercizio 37. Siano A e B due matrici $m \times m$ invertibili. Dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Esercizio 38. Verificare le seguenti relazioni

$$M_{ij} \cdot M_{ij} = I \qquad M_i(\alpha) \cdot M_i(\alpha^{-1}) = I \qquad M_{ij}(\alpha) \cdot M_{ij}(-\alpha) = I.$$

Spazi vettoriali, sottospazi, basi, generatori e vettori lin.indipendenti

Esercizio 39. Dimostrare che l'insieme delle matrici mxn a coefficienti in un campo K con somma, prodotto per scalare e zero definito in classe è uno spazio vettoriale.

Esercizio 40. Sia X un insieme e K un campo. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{F}_X$ delle funzioni da X in K con somma, prodotto per scalare e zero definito in classe è uno spazio vettoriale.

Esercizio 41. Sia X un insieme finito e K un campo e sia $\mathcal{F}_X$ lo spazio vettoriale delle funzioni da X in K. Per ogni $x \in X$ sia δ_x la funzione definita nelmodo seguente:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x; \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

Dimostrare che se $x_1, \ldots, x_n$ sono gli elementi di X allora $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}$ è una base di $\mathcal{F}_X$.

Esercizio 42. Sia V uno spazio vettoriale allora $\{0\}$ e V sono sempre sottospazi vettoriali di V. L'insieme vuoto è un sottospazio vettoriale di V?

Esercizio 43. Sia $V = \mathbb{R}^2$. Si dimostri che gli unici sottospazi di V diversi da $\{0\}$ e da V sono le rette passanti per l'origine.

Esercizio 44. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. Per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ sia E_{ij} la matrice che ha tutte le entrate uguali a 0 tranne l'entrata nel posto i, j che è uguale a 1. Dimostrare che le matrici E_{ij} per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ sono una base di V.

Esercizio 45. Si dimostri che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste i tale che v_i è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Esercizio 46. In classe abbiamo dimostrato che se $v_1, \dots, v_n$ è un insieme minimale di vettori che generano V (ovvero se un sottoinsieme proprio di $v_1, \dots, v_n$ non genera V) allora $v_1, \dots, v_n$ sono una base. Si dimostri che se $v_1, \dots, v_n$ è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti (ovvero se aggiungendo un qualsiasi vettore di V alla lista si ottengono dei vettori linearmente dipendenti) allora $v_1, \dots, v_n$ generano V.

Esercizio 47. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 a coefficienti complessi. Si trovi una base di V e si calcoli la dimensione di V.

Esercizio 48. Sia $W = \{(x, y, z) \in K^3 : \ x + y + z = 0\}$. W è un sottospazio di K^3. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione. Si completi la base di W trovata ad una base di K^3.

Si ricorda che le matrici simmetriche sono le matrici A tali che $A^t = A$ mentre le matrici antisimmetriche sono le matrici A tali che $A^t = -A$.

Esercizio 49. Sia W lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche a coefficienti complessi 2×2. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 50. Sia W lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche a coefficienti complessi $n \times n$. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 51. Sia W lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche a coefficienti complessi 2×2. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 52. Sia W lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche a coefficienti complessi $n \times n$. Se ne trovi una base e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 53 (I compitino 2015-2016)**.** Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Esercizio 54 (Compito 6 giugno 2016)**.** Siano V e W due sottospazi di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$. Quali sono le possibili dimensioni del sottospazio $V \cap W$? Motiva la risposta in modo completo.

Esercizio 55. Completare la dimostrazione che se U e V sono sttospazi di W allora $U + V$ è un sottospazio di W.

Esercizio 56. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che sono una base di $\mathbb{R}^4$ e si calcolino le coordinate dei seguenti vettori rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Applicazioni lineari, duale e determinanti

Esercizio 57. Quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z + y \\ 5y \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ x \end{pmatrix} \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - e^y \\ z + x \end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad d\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$$

Esercizio 58. Sia $V = \mathbb{C}[t]_{\leqslant 3}$ e sia $F : V \longrightarrow V$ definita da $F(p(t)) = p'(t) + p(t+1)$. Si verifiche che è una applicazione lineare e si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base standard di V in partenza e in arrivo.

Esercizio 59. Sia $E_1 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e sia $E_2 = \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia $T : E_1 \longrightarrow E_2$ l'applicazione $T(X) = X \cdot A$.

(1) si dimostri che T è una applicazione lineare;
(2) si scelgano basi di E_1 ed E_2 e si scriva la matrice associata a T rispetto a queste basi.

Esercizio 60. Sia $F : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare di spazi vettoriali. Siano $v_1, \dots, v_n$ degli elementi di V. Si dimostri una delle seguenti affermazioni:

(1) se F è iniettiva e $v_1 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono linearmente indipendenti;
(2) se F è surgettiva e $v_1 \dots v_n$ generano V allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ generano W;
(3) se F è un isomorfismo e $v_1 \dots v_n$ sono una base di V allora $F(v_1), \dots, F(v_n)$ sono una base di W.

Esercizio 61. Sia data la seguente matrice 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) si determini un vettore non nullo v_1 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_1) = v_1$;
(2) si determini un vettore non nullo v_2 di $\mathbb{R}^2$ tale che $L_M(v_2) = 3v_2$;
(3) si calcoli M^{100}.

Esercizio 62. Sia V uno spazio vettoriale di base $v_1, \dots, v_n$ e sia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la base duale. Si dimostri che per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \varphi_1(v)\, v_1 + \varphi_2(v)\, v_2 + \cdots + \varphi_n(v)\, v_n.$$

Esercizio 63. Sia data la seguente base di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si calcoli la base duale.

Esercizio 64. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 9}$ e si considerino le funzioni $\varphi_i : V \longrightarrow \mathbb{C}$ definite da $\varphi_i(f(t)) = f(i)$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Si dimostri che $\varphi_0, \dots, \varphi_9$ sono una base di V^* e se ne calcoli la base duale.

Esercizio 65. Siano $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Si consdieri la matrice $n \times n$:

$$\mathsf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ & \dots & & & & \\ 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-2} & \lambda_i^{n-1} \\ & \dots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si dimostri che V è invertibile se e solo se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti distinti. (sugg. ci si ispiri all'esr 64).

Esercizio 66. Utilizzando le proprietà 1,2,4 enunciate venerdì a lezione si deduca che se sommo alla riga di una matrice quadrata un multiplo di un'altra riga il determinante non cambia.

Esercizio 67. Si enuncino proprietà analoghe alle proprieta' 1,2,4,5 enunciate venerdì a lezione, sostituendo alle righe le colonne. Si deducano inoltre tale proprietà dalle proprietà 1,2,4,5 e dalla proprietà 6.

Autovalori, autovettori, polinomio caratteristico e diagonalizzabilità

Esercizio 68. Sia uno spazio vettoriale complesso. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $F^4 = Id$. Si dimostri che se λ è un autovalore di F allora $\lambda^4 = 1$

Esercizio 69. Sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione diagonalizzabile. Si dimostri che F^2 è diagonalizzabile.

Esercizio 70. Sia A una matrice 5×5 triangolare superiore che ha lungo la diagonale tutte le entrate uguali a 2. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $A = 2\,I$.

Esercizio 71. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti complessi. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ definita nel seguente modo:

$$F(p(t)) = p(0)x^2 + p'(x)$$

a) Si determinino gli autovalori di F e le loro molteplicità.
b) Si determini una base di autovettori.
c) Si calcoli F^{15}

A Compitino di algebra lineare del 19 febbraio 2016: prima parte

Istruzioni: Avete 30 minuti di tempo a disposizione. Come prima cosa scrivete nome, cognome e matricola nello spazio qui sotto. Scrivete solo il risultato o la lettera della risposta corretta senza nessuna spiegazione negli appositi spazi. Effettuate i calcoli necessari sui fogli che vi saranno consegnati a parte. Dovete consegnare solo questo foglio. Prima di consegnare il foglio trascrivetevi su un foglietto i risultati. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Domanda 1. Sia $z = 1 + i$ e $w = 2 + i$. Calcolare z/w.

Domanda 2. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Domanda 3. Sia $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ una applicazione lineare di rango 3. Determinare la dimensione del nucleo di L.

Domanda 4. Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$. Sia $\dim U = 3$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

A) $\dim(U + W) = 8$ qualsiasi siano U e W.
B) $\dim(U \cap W) = 2$ qualsiasi siano U e W.
C) Se $U \cap W$ è diverso da zero allora $\dim(U + W) = 8$.
D) Se $\dim(U \cap W) = 3$ allora $U \subset W$.
E) Se $\dim U + W = 8$ allora $\dim(U \cap W) = 3$.

Domanda 5. Si determini la dimensione dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{5\times 3}(\mathbb{R})$

Compitino del 19 febbraio 2016: seconda parte

Nessuno di noi si ricorda quanto tempo abbiamo dato per la seconda parte, credo 2 ore e 30.

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) Si definisca cosa è $\ker T$, il nucleo di T.
b) Si dimostri che se $\ker T = \{0\}$ allora T è iniettiva.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $L_k : V \longrightarrow V$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = p(t+1) - k\,p(t)$$

per ogni polinomio $p(t)$.

a) Si scelga una base di V e si determini la matrice associata ad L_k rispetto a tale base;
b) Si determini il rango di L_k al variare del parametro k;

Esercizio 3. Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriali delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : E \longrightarrow E$ l'applicazione definita da $T(X) = B \cdot X$

a) Si determinino nucleo e immagine di T.
b) Si determini una base di E e si calcoli la matrice associata a T rispetto a questa base.
c) Si calcoli il determinante di T.

Esercizio 4. Sia C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini un vettore non nullo $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_1 = 3v_1$.
b) Si determini un vettore non nullo $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $C \cdot v_2 = -9\,v_2$.
c) Si calcoli C^{100}.