ESERCIZI SU AFFINITÀ

Titolo nota 16/05/2017

4.7 4.8 4.9 ------ 4.12

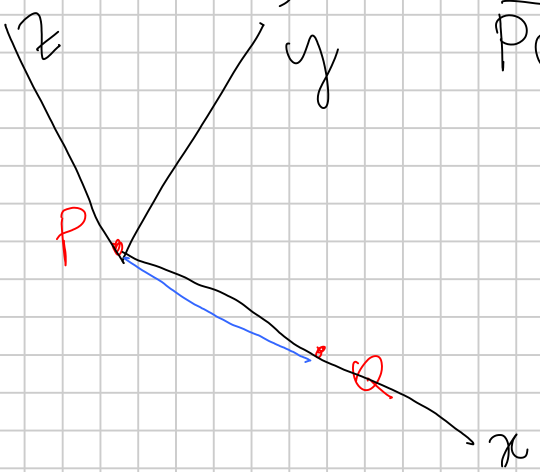
Es. 4.7 $P, Q \in \mathbb{R}^3$ (punti distinti)

luogo dei punti equidistanti da P e Q è un piano π

$R \in \pi \Rightarrow R$ è equidistante da P e Q

R equidistante da P e $Q \Rightarrow R \in \pi$

(π è insieme di TUTTI E SOLI i punti equidistanti da P e Q)



$\overline{PQ} = 1$

$P \equiv (0,0,0)$

$Q \equiv (1,0,0)$

R $\quad R \equiv (x_R, y_R, z_R)$

$$[d(Q,R)]^2 = (x_R-1)^2 + y_R^2 + z_R^2$$

$$[d(P,R)]^2 = x_R^2 + y_R^2 + z_R^2$$

$$\Leftarrow \quad (x_R-1)^2 + \cancel{y_R^2} + \cancel{z_R^2} = x_R^2 + \cancel{y_R^2} + \cancel{z_R^2}$$

$$\cancel{x_R^2} + 1 - 2x_R = \cancel{x_R^2}$$

$x_R = \frac{1}{2}$ $\quad y_R, z_R$ qualsiasi

$$R \in \{ x - 1/2 = 0 \}$$

$\Rightarrow R \in \pi \qquad \left(\frac{1}{2}, y_R, z_R\right)$

$$[d(P,R)]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y_R^2 + z_R^2 = \frac{1}{4} + y_R^2 + z_R^2$$

$$[d(Q,R)]^2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + y_R^2 + z_R^2 = \frac{1}{4} + y_R^2 + z_R^2$$

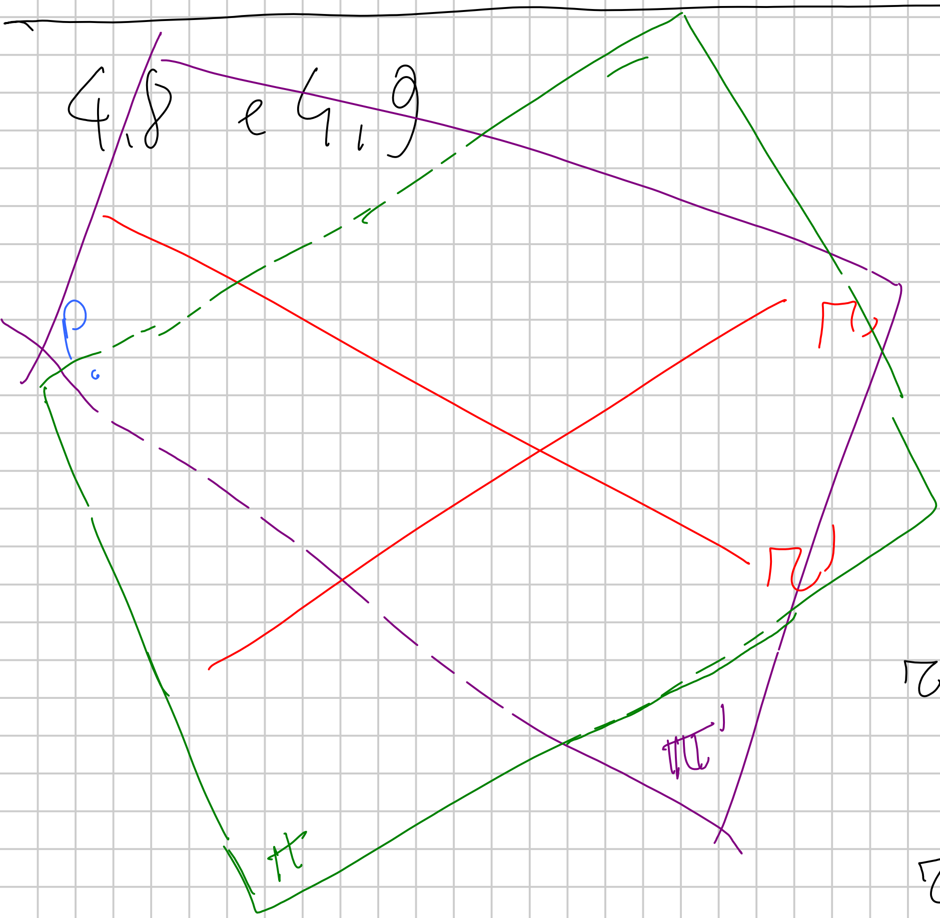
quindi $\quad d(P,R) = d(Q,R)$

Si può fare con $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$
$Q \equiv (x_Q, y_Q, z_Q)$

$$(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2 + (z_R - z_Q)^2 =$$
$$= (x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2 + (z_R - z_P)^2$$

Una buona scelta del Sistema di rif. semplifica la risoluzione!

4.8 e 4.9



$\pi' \parallel r$

$\pi \parallel r'$

4.9

$$r: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- Tutti i piani contenenti r
- scegliamo tra essi quello passante per P $\rightarrow \pi$
- Tutti i piani contenenti r'
- scegliamo tra essi quello passante per P $\rightarrow \pi'$

retta s generata intersecando π' e π → essa è su un piano che contiene r

→ essa è anche su un piano che contiene r'

passa per p? $P=(2,1,0)$

$$\{\mu(x_1+2x_2+1)+\lambda(x_2-2x_3-1)=0\}=\mathcal{F}$$

Scegliamo μ e λ tali che $P\in\pi(\mu,\lambda)$

$$\mu(2+2\cdot 1+1)+\lambda(1-2\cdot 0-1)=0$$

$$5\mu+\lambda\cdot 0=0 \quad\rightarrow\quad \mu=0 \quad \lambda \text{ qualsiasi}$$

(ad esempio $\lambda=1$)

$$\pi=\{x_2-2x_3-1=0\}$$

$$\{\mu'(2x_1-x_2-1)+\lambda'(3x_1+3x_2-x_3)=0\}=\mathcal{F}'$$

Scegliamo μ' e λ' tali che $P\in\pi'(\mu',\lambda')$

$$\mu'(2\cdot 2-1-1)+\lambda'(3\cdot 2+3\cdot 1-0)=0$$

$$2\mu'+9\lambda'=0 \qquad \mu'=9 \quad \lambda'=-2$$ ad esempio!

$$9(2x_1 - x_2 - 1) - 2(3x_1 + 3x_2 - x_3) = 0$$

$$18x_1 - 9x_2 - 9 - 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$

$$12x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 9 = 0 \qquad \pi'$$

$$s: \begin{cases} x_2 - 2x_3 - 1 = 0 \\ 12x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 9 = 0 \end{cases}$$

s è certamente incidente sia con r che con r'

contiene r / contiene r'

π π' non sono paralleli $\rightarrow$ $\pi \cap \pi'$ è

una retta s che contiene P

questa retta s sta su un piano che contiene r

sta su un piano che contiene r'

s e r sono complanari   s e r' sono complanari

s non è $\parallel$ r perché π' non è $\parallel$ r

s non è $\parallel$ r' perché π non è $\parallel$ r'

] PER IPOTESI

s è incidente sia con r che con r'

---

2 piani

$$ax + by + cz = d \qquad rk(a\,b\,c) = 1$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \qquad rk(a'\,b'\,c') = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

INCIDENTI $\iff$ $rk(A)=2$

Paralleli non coincidenti $\iff$ $rk(A)=1$ $rk(A')=2$

COINCIDENTI $\iff$ $rk(A')=1$

Retta e piano nello spazio

$\pi = \{ ax+by+cz=d)$ $rk(a\ b\ c)=1$

$$r = \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad rk\begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{pmatrix}=2$$

Piano e retta incidenti $\iff rk\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}}_{A}=3$

retta $\parallel$ piano, ma non giace su di esso $\iff rk(A)=2$ $rk\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}}_{A'}=3$

retta che giace sul piano $\iff$ $rk(A)=2$ $rk(A')=2$

---

2 Rette

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_1'x+b_1'y+c_1'z=d_1' \end{cases} \quad r_1$$

$$rk\begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1' b_1' c_1' \end{pmatrix}=2 \qquad \begin{cases} a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_2'x+b_2'y+c_2'z=d_2' \end{cases} \quad r_2$$

$$rk\begin{pmatrix} a_2 b_2 c_2 \\ a_2' b_2' c_2' \end{pmatrix}=2$$

rette coincidenti $\Longleftrightarrow$ $rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{pmatrix} = 2$ $\leftarrow A'$

$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{pmatrix} = 3 = rk(A')$ $\Longleftrightarrow$ rette incidenti $\leftarrow A$

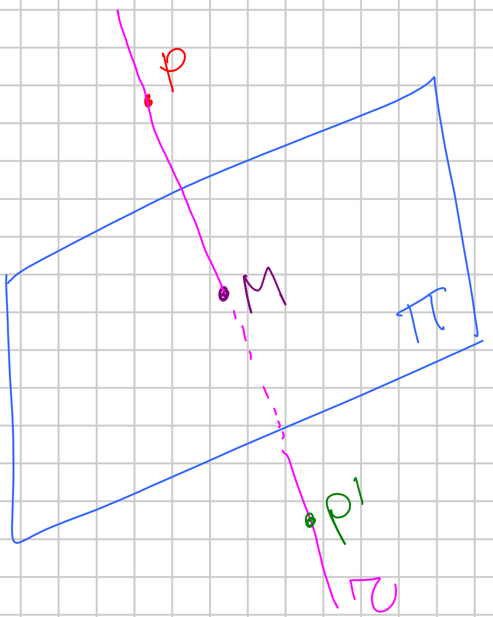
$rk(A) = 2 \quad rk(A') = 3 \Longleftrightarrow r_1 // r_2$, non coincidenti

$rk(A) = 3 \quad rk(A') = 4 \Longleftrightarrow r_1$ e r_2 sono sghembe

---

4.10 $\quad \pi = \{x + y - z = 2\}$

$f(x) = Ax + b$ riflessione rispetto a π



$r \perp \pi$

r passa per P $\quad P' = f(P)$

$M = r \cap \pi$

Determinare su r un punto P' tale che M è punto medio del segmento PP'

r ha direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e passa per $P = (x_P, y_P, z_P)$

$$\begin{cases} x = t + x_p \\ y = t + y_p \\ z = -t + z_p \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$

eq. parametriche di r

ora troviamo M

$$(\bar{t} + x_p) + (\bar{t} + y_p) - (-\bar{t} + z_p) = 2$$

$$3\bar{t} + x_p + y_p - z_p - 2 = 0 \qquad \bar{t} = \frac{2 - x_p - y_p + z_p}{3}$$

$$x_M = \bar{t} + x_p = \frac{2 - x_p - y_p + z_p}{3} + x_p = \frac{2 + 2x_p - y_p + z_p}{3}$$

$$y_M = \bar{t} + y_p = \cdots \quad \cdots + y_p = \frac{2 - x_p + 2y_p + z_p}{3}$$

$$z_M = -\bar{t} + z_p = -\frac{\cdots}{3} + z_p = \frac{-2 + x_p + y_p + 2z_p}{3}$$

$$\frac{x_{p'} + x_p}{2} = x_M \Rightarrow x_{p'} = 2x_M - x_p \text{ e analoghe:}$$

$$y_{p'} = 2y_M - y_p$$

$$z_{p'} = 2z_M - z_p$$

$$x_{p'} = \frac{4 + 4x_p - 2y_p + 2z_p}{3} - x_p = \frac{4 + x_p - 2y_p + 2z_p}{3}$$

$$y_{p'} = \frac{4 - 2x_p + 4y_p + 2z_p}{3} - y_p = \frac{4 - 2x_p + y_p + 2z_p}{3}$$

$$z_{p'} = \frac{-4 + 2x_p + 2y_p + 4z_p}{3} - z_p = \frac{-4 + 2x_p + 2y_p + z_p}{3}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

"coordinate affini"

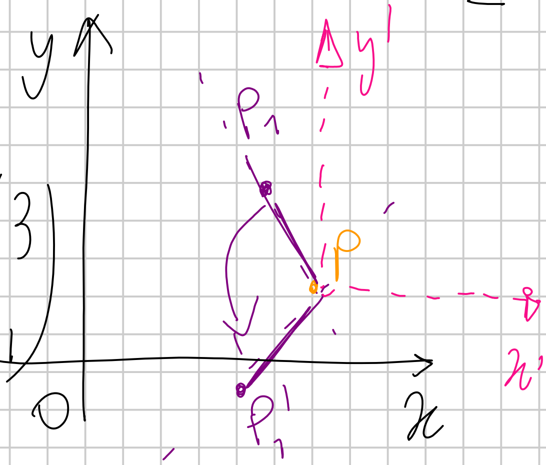
$$P \equiv (x_p, y_p, z_p) \rightsquigarrow (x_p, y_p, z_p, 1)$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{A} & b \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.11 $\quad f = Ax + b \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad$ rotaz. di $\frac{\pi}{2}$

intorno al punto $P \equiv (3, 1)$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[R\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} e_1 \xrightarrow{R} e_2 \\ e_2 \xrightarrow{R} -e_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

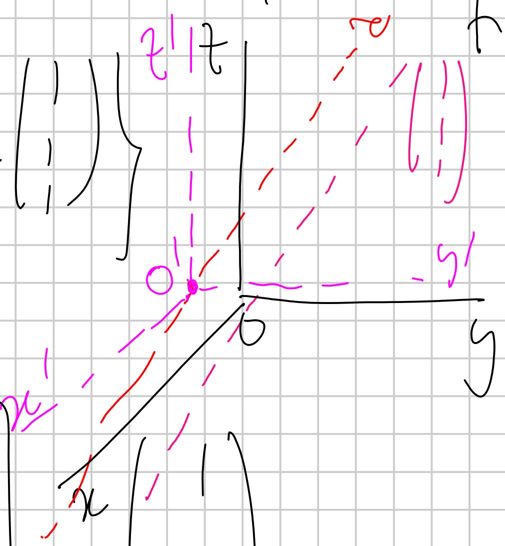
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1+1 \\ x_1-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1+4 \\ x_1-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.12 $\quad R_{2\pi/3}$ intorno a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con l'origine fissa

$$R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \\ z_p' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p-1 \\ y_p-0 \\ z_p-1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \\ z_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_p-1 \\ x_p-1 \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_p \\ x_p-1 \\ y_p+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

A $\quad$ b

---

u, v, x vettori di $\mathbb{R}^3$

$u \wedge x = u \wedge v \qquad x$ quanto può valere?

$x = v$ è certamente soluzione!

$u \wedge u = 0 \qquad u \wedge (\lambda u) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$u \wedge \underbrace{(\lambda u + v)}_{= x} = \lambda \cancel{(u \wedge u)} + u \wedge v = u \wedge v$

$\boxed{x = \lambda u + v}$

$u \wedge x = v \qquad$ che soluzioni ha?

deve essere $v \perp u$, altrimenti non ci sono soluzioni!

Devo scrivere

$v = u \wedge w$

$u \wedge x = u \wedge w$

$x = \lambda u + w$

Devo trovare un w buono!

$w = \dfrac{u \wedge v}{\|u\|^2}$ dovrei essere a posto

$u \wedge \underbrace{\left(\dfrac{u \wedge v}{\|u\|^2} \right)}_{v_w}$

provate a farlo in coord. cart.

$v - \underbrace{\dfrac{u \cdot v}{\|u\|^2}}_{= 0}$ $\quad v \perp u$