ESERCIZI SU PROD. SCAL.

Note Title 04/04/2017

ESERCIZIO 3.7 p. 8

$p, q \in \mathbb{R}_2[x]$

$p(x) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2$

$q(x) = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot x + q_2 \cdot x^2$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$

$p(0) = p_0$ $\quad p'(x) = p_1 + 2 \cdot p_2 \cdot x$ $\quad p'(0) = p_1$

$q(0) = q_0$ $\quad q'(x) = q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot x$ $\quad q'(0) = q_1$

$p''(x) = 2p_2$ $\quad q''(x) = 2q_2$

$p''(0) = 2p_2$ $\quad q''(0) = 2q_2$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + 4 p_2 q_2$

$W \subset \mathbb{R}_2[x]$ $\quad W = \{ p(x) : p(1) = 0 \}$, $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

$p(x) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot (x) + p_2 (x^2)$

$p(1) = p_1 + p_2 + p_0$ $\quad p(1) = 0 \Rightarrow p_0 = -p_2 - p_1$

$p(x) = -(p_1 + p_2) \cdot \boxed{1} + p_1 \cdot \boxed{(x)} + p_2 \boxed{(x^2)}$

$= p_1 \boxed{(x-1)} + p_2 \boxed{(x^2 - 1)} \Rightarrow \in \mathbb{R}_2[x]$

$x-1$ e x^2-1 sono inoltre linearmente indipendenti

$w_1(x) = x-1$

$w_2(x) = x^2-1$

$W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$

W è un s.s.v. di $\mathbb{R}_2[x]$

$\dim(W) = 2$

$v \in \mathbb{R}_2[x] \ : \ \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$

Basta verificare questo $\forall$ vettore della base di W

$$v(x) = v_0 \cdot 1 + v_1 x + v_2 x^2$$

$$\begin{cases} \langle v, w_1 \rangle = 0 \\ \langle v, w_2 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 \cdot (-1) + v_1 \cdot 1 + 4 v_2 \cdot 0 = 0 \\ v_0 \cdot (-1) + v_1 \cdot 0 + 4 \cdot v_2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 - v_1 = 0 \\ v_0 - 4v_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ v_2 &= v_0/4 \end{aligned}$$

$$v(x) = v_0 \boxed{1} + v_0 \boxed{x} + \frac{v_0}{4} \boxed{x^2} =$$

$$= v_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right)$$

$W^\perp = \text{Span}\left\{1 + x + \frac{x^2}{4}\right\} \qquad \dim W^\perp = 1$

ESERCIZIO 3.12

$\mathbb{R}^3$. $U \subset \mathbb{R}^3$ $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax + by + cz = 0 \right\}$

$W \in \mathbb{R}^3$ $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a'x + b'y + c'z = 0 \right\}$

U, W devono essere distinti

$ax + by + cz = 0$ $\quad K \neq 0$

$Kax + Kby + Kcz = 0$ è lo stesso piano!

$\begin{cases} a' \neq Ka \\ b' \neq Kb \\ c' \neq Kc \end{cases}$ qualunque sia la scelta di K

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ devono essere lin. indipendenti

$rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$, quindi non è possibile che

$n = ab' - ba'$, $m = ca' - ac'$, $l = bc' - cb'$ siano tutti nulli, ce ne deve essere almeno uno $\neq 0$

(1) $U \cap W$ $\quad U^\perp$ $\quad W^\perp$ sono 3 rette vettoriali (s.s.v. di dim. 1)

devo dimostrarlo!

$U \cap W$ $\quad * \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

* è un sistema omogeneo $n=3$ incognite, 2 equaz.

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$ il sistema ha ∞^1 soluz (Rouché - Capelli)

$\nwarrow A$

lo spazio delle soluz. è un s.s.v. di $\mathbb{R}^3$

avente dimensione $n - rk(A) = 3-2 = 1$ (retta)

$$l = bc' - cb'$$
$$m = ca' - ac'$$
$$n = ab' - ba'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} bc'-cb' \\ ca'-ac' \\ ab'-ba' \end{pmatrix}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$a(\alpha bc' - \alpha cb') + b(\alpha ca' - \alpha ac') + c(\alpha ab' - \alpha ba') = \cancel{\alpha abc'} - \cancel{\alpha acb'} + \cancel{\alpha a'bc} - \cancel{\alpha abc'} + \cancel{\alpha ab'c} - \cancel{\alpha a'bc} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$x = \alpha l$
$y = \alpha m$
$z = \alpha n$

$ax + by + cz = 0$

$$a'(\alpha bc' - \alpha cb') + b'(\alpha ca' - \alpha ac') + c'(\alpha ab' - \alpha b'a) =$$

$\ldots = 0$

l, m, n sono soluzione. Come li ho trovati?

$$\begin{cases} ax + by = -cz \\ a'x + b'y = -c'z \end{cases}$$

supponendo, senza perdita di generalità (WLOG), $ab' - ba' \neq 0$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -cz & b \\ -c'z & b' \end{pmatrix}}{ab' - ba'} = z\,\frac{(bc' - b'c)}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & -cz \\ a' & -c'z \end{pmatrix}}{ab' - ba'} = z\,\frac{a'c - ac'}{ab' - ba'}$$

z è libero $\qquad z = \alpha(ab' - ba') = \alpha n$

$y = \alpha(a'c - ac') = \alpha m$

$x = \alpha(bc' - b'c) = \alpha l$

abbiamo trovato "a mano" $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

dati 2 piani $ax + by + cz\ (+d) = 0$

$a'x + b'y + c'z\ (+d') = 0$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$, la retta r ottenuta intersecando i 2 piani ha direzione $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

con $l = bc' - cb'$ $\quad m = ca' - ac'$ $\quad n = ab' - ba'$

$$U^\perp = \beta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad u' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a \\ \beta b \\ \beta c \end{pmatrix}$$

$$u' \cdot u = 0 \quad \forall u \in U$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad ax + by + cz = 0 \Rightarrow$$

$$\beta a x + \beta b y + \beta c z = 0$$

prodotto scalare euclideo fra $\underbrace{\begin{pmatrix} \beta a \\ \beta b \\ \beta c \end{pmatrix}}_{= u'}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow u$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp$ tutti i vettori di U

$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \perp$ tutti i vettori di W

$$\alpha \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad \beta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \gamma \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

---

(2) $(U \cap W)^\perp = \underbrace{U^\perp + W^\perp}_{} \rightarrow \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\} = P$

$$p \in \underline{P} \qquad p = \beta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

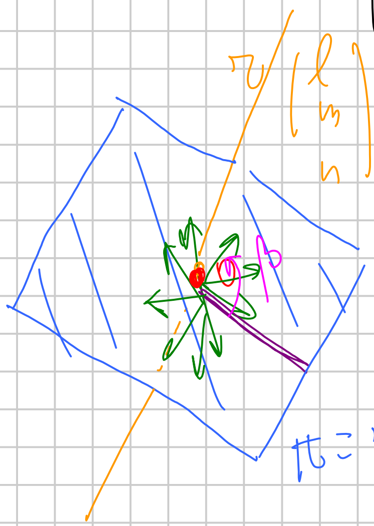
$$p = \begin{pmatrix} a\beta + a'\gamma \\ b\beta + b'\gamma \\ c\beta + c'\gamma \end{pmatrix} \qquad U \cap W = \alpha \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$\forall\ r = \alpha \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ si ha che $p \cdot r = 0$

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = 0$$

e questo l'abbiamo già fatto!

(Trovare un modo per "parametrizzare" tutti i vettori $\perp \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ provate a pensarci!



)

(3) $\exists$ base B v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 \in (U \cap W)$, $v_2 \in U^{\perp}$, $v_3 \in W^{\perp}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} bc' - cb' & a & a' \\ ca' - ac' & b & b' \\ ab' - ba' & c & c' \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\mathrm{rk}(a\ b\ c) = 1 \qquad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$\mathrm{rk}(a'\ b'\ c') = 1$$

(4) Esempio pratico

$U = \{x+y=0\}$

$W = \{x+z=0\}$

$a=1 \quad b=1 \quad c=0$

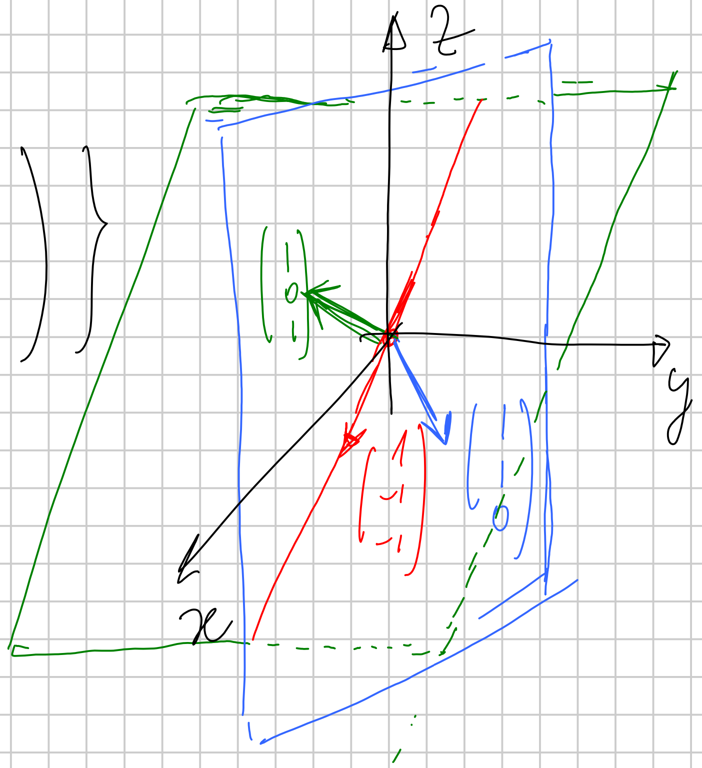
$a'=1 \quad b'=0 \quad c'=1$

$$rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\end{pmatrix} = 2$$

$l = bc' - cb' = 1 \qquad m = ca' - ac' = -1$

$n = ab' - ba' = -1$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$



Date 2 rette

$$r_1 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$$

$$r_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix}l'\\m'\\n'\end{pmatrix}$$

$rk(l \ m \ n) = 1$

$rk(l' \ m' \ n') = 1$

Come facciamo a determinare se sono $\perp$?

$v_1 \in r_1 \qquad v_1 \cdot v_2 = 0 \quad \forall v_1 \in r_1, \ \forall v_2 \in r_2$

$v_2 \in r_2$

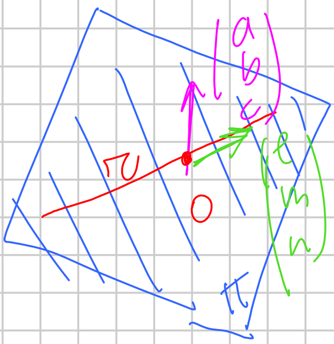
$$\begin{pmatrix}\alpha l\\ \alpha m\\ \alpha n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\beta l'\\ \beta m'\\ \beta n'\end{pmatrix} = \alpha\beta ll' + \alpha\beta mm' + \alpha\beta nn' =$$

$$= \alpha\beta(ll' + mm' + nn') = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta \Rightarrow$$

$$ll' + mm' + nn' = 0$$ condiz. di $\perp$ fra due rette nello spazio

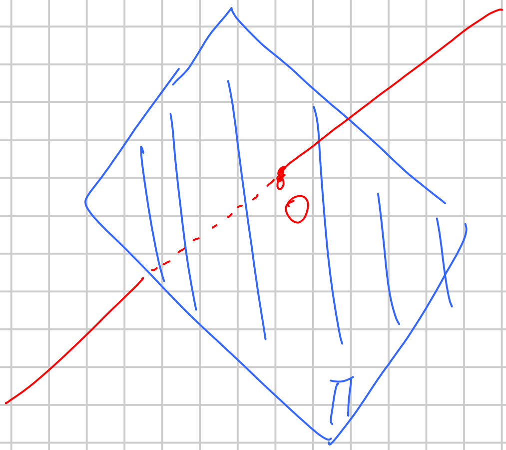
$$\begin{cases} x = \alpha l + x_0 \\ y = \alpha m + y_0 \\ z = \alpha n + z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \beta l' + x_0' \\ y = \beta m' + y_0' \\ z = \beta n' + z_0' \end{cases}$$ stessa cosa!

Come si fa a vedere se una retta giace su $\in$ ad un piano (tutti s.s.v.)



$r \subset \pi$

tutti i punti di r sono anche punti di π



$r \cap \pi = r$ $\qquad\qquad$ $r \cap \pi = \emptyset$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

(Se π e r non passano per O, occorre in più verificare che π e r abbiano (almeno) un punto in comune)

ESERCIZIO 3.11

V spazio vettoriale $\dim(V) = n$

U, W s.s.v di V $\qquad U \subset V \quad W \subset V$

$\dim(U) = m \qquad m < n$

$\dim(W) = p \qquad p < n$

(1) Se $U \subset W$ allora $W^\perp \subset U^\perp$

$\uparrow$ $m < p$ $\qquad$ (se fosse $U \subseteq W$, $m \leq p$)

base di U $\{e_1 \ldots e_m\}$ $\quad$ m vettori

base di W $\{e_1 \ldots e_m \ldots e_p\}$ $\quad$ p vettori

base di V $\{e_1 \ldots e_m \ldots e_p \ldots e_n\}$ $\quad$ n vettori

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall\, w \in W\}$$

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall\, u \in U\}$$

Basta verificare questo sui vettori di base

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$$

Impongo che $v \in W^\perp$ $\quad$ (1) $\boxed{\langle v, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \ldots p}$

Impongo che $v \in U^{\perp}$ ② $\boxed{\langle v, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots m}$

Se $v \in W^{\perp}$, allora $v \in U^{\perp}$. Questo discende dal fatto che $m < p$

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right), e_j \right\rangle = 0$$

① $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots p$ p equazioni

② $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots m$

m equazioni

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad s_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

① $$\begin{cases} s_{11}\alpha_1 + \cdots + s_{1n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ s_{p1}\alpha_1 + \cdots + s_{pn}\alpha_n = 0 \end{cases}$$

n incognite p eq.

$W^{\perp}$ $\quad rk(A_{W^{\perp}}) \leq p$

$$\dim(W^{\perp}) = n - rk(A_{W^{\perp}}) \geq n - p$$

② $$\begin{cases} s_{11}\alpha_1 \cdots s_{1n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ s_{m1}\alpha_1 \cdots s_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases}$$

n incognite

m equazioni

le prime m equazioni di 1 sono esattamente le stesse di 2.

Quindi, se $v \in W^{\perp}$, allora $v \in U^{\perp}$

ci sono altre $p-m$ condizioni

quindi $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$

$\dim(U^{\perp}) \geq n-m$

$\dim(W^{\perp}) \geq n-p$

ma $p > m$ perché $U \subset W$ per ipotesi

$-p < -m$

$n-p < n-m$

$\dim(W^{\perp}) < \dim(U^{\perp})$

Quindi si ha che vale il segno di $\subset$ e non di $\subseteq$