ESERCIZI SU PRODOTTI SCALARI

Note Title 28/03/2017

Esercizio 3.2

$V = M(n)$ $\qquad f : V \times V \to \mathbb{R}$

$f(A, B) = tr(AB)$

$g : V \times V \to \mathbb{R}$

$g(A, B) = tr({}^tAB)$

$f(A_1 + A_2, B) \overset{?}{=} f(A_1, B) + f(A_2, B)$

$tr[(A_1 + A_2) \cdot B] = tr[\underbrace{A_1 B}_{C_1} + \underbrace{A_2 B}_{C_2}] =$

$tr(A_1 B) + tr(A_2 B) = f(A_1, B) + f(A_2, B)$

$f(\lambda A, B) \overset{?}{=} \lambda f(A, B)$

$tr(\lambda C) = \lambda tr(C)$

$tr((\lambda A) B) = tr(\lambda \underbrace{(AB)}_{C}) = \lambda tr(AB) = \lambda f(A, B)$

$f(A, B) \overset{?}{=} f(B, A)$

$t(\overset{C}{AB}) = t(BA)$ vero per una proprietà della traccia

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$ $\qquad (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{kj}$

in generale $(AB)_{ij} \neq (BA)_{ij}$

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right) \overset{*}{=}$$

i, k sono indici muti → li posso rinominare (quasi) come voglio. In particolare li posso scambiare

$$\overset{*}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{B_{ki} \cdot A_{ik}}_{\text{NUMERI}} \right)$$

moltiplicaz. fra numeri

(commutatività del $\cdot$ fra numeri)

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) =$$

commutatività della somma fra numeri

$$= \mathrm{tr}(AB)$$

In questa maniera abbiamo dimostrato che f è un prodotto scalare

Per g la dimostrazione è identica!

(2) Mostrare che g è definito positivo

$A \in M(n) \quad A \neq 0$ bisogna mostrare che $g(A, A) > 0$

$$\mathrm{tr}({}^t\!AA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^t\!AA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} ({}^t\!A)_{ik} A_{ki} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{ki} = \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{n} (A_{ki})^2$$ è una somma di quadrati, quindi è non negativa

Si annulla se e solo se $A_{ki} = 0 \quad \forall k \ \forall i = 1..n$

ma questo è escluso perché abbiamo scelto $A \neq 0$

quindi $tr({}^tAA) > 0 \quad \forall A \neq 0$ e

il prodotto scalare g è definito positivo.

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(u)\,du \qquad \int_a^b f(z)\,dz$$

sono tutti uguali,

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=1}^{5} a_j$$

$$\sum_{k=1}^{5} a_{ki} \qquad \sum_{k=1}^{5} a_{kj}$$

non sono la stessa cosa!

(3) f è definito positivo? NO

Basta un controesempio! lo trovo "a forza"

$n=2 \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$tr(A^2) = tr\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = tr\begin{bmatrix} a^2+bc & \cdots \\ \cdots & d^2+bc \end{bmatrix}$$

$$= a^2 + d^2 + 2bc = 0 \text{ ad esempio}$$

$a=1 \quad d=1 \quad b=1 \quad c=-1$

$1 + 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) = 2-2=0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad tr(A^2) = tr\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Se prendete $tr({}^tA A)$ per $n=2$ risulta
$a^2+b^2+c^2+d^2 > 0$ se $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$

BROGLI / FORTUNA / LUMINATI esercitiamo "teorico"

3.5 → Partiamo da 3.1.24 e 3.1.25 pagina 40 delle dispense (appunti) Prof. Martelli

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono congruenti

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\}n \quad S' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i > 0$

$S' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Ogni matrice diagonale $n \times n$ che ha elementi sulla diagonale tutti strettamente positivi è congruente alla matrice identità $n \times n$

Esercizio 3.1.24. la congruenza è una relazione di equivalenza

Dato un insieme $A = \{a_1 \dots a_n \dots\}$

Si prende il prodotto cartesiano $A \times A$ e un suo sottoinsieme $\mathcal{S}$ (formato da tante coppie ordinate (a_i, a_j))

Si dice che $\mathcal{S}$ definisce una relazione di equivalenza su A se

$(a, a) \in \mathcal{S} \quad \forall a \in A \qquad a \mathcal{R} a$

se $(a, b) \in \mathcal{S}$, anche $(b, a) \in \mathcal{S}$

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b \mathcal{R} a$

se $(a, b) \in \mathcal{S}$ e $(b, c) \in \mathcal{S}$ anche $(a, c) \in \mathcal{S}$

$a \mathcal{R} b, \; b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$

$S \mathcal{R} S \qquad M = I \qquad {}^tISI = S$

ogni matrice è congruente a sé stessa (proprietà riflessiva)

se $S \mathcal{R} S'$, allora $S' \mathcal{R} S$

$\downarrow$

$\exists M$ tale che $S = \boxed{{}^tMS'M}$ M invertibile

$$({}^tM)^{-1} S M^{-1} = ({}^tM)^{-1}({}^tMS'M)M^{-1}$$

$$\boxed{({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})}$$

$${}^t(M^{-1}) S \overbrace{M^{-1}}^{N} = \underbrace{\left(({}^tM)^{-1}\,{}^tM\right)}_{I} S' \underbrace{(MM^{-1})}_{I}$$

$${}^tNSN = S'$$

$\exists N$ (invertibile!) tale che $S' = {}^tNSN$

(Vale la proprietà simmetrica)

$S = {}^tMS'M \qquad S' = \boxed{{}^tNS''N}$

S è congruente a S' $\qquad$ S' è congruente a S''

$$S = {}^tM({}^tNS''N)M = ({}^tM\,{}^tN)S''(NM)$$

$$= {}^t(NM)S''(NM) \qquad NM = Q$$

$S = {}^tQ\, S''\, Q$

Q è invertibile perché N e M separatamente lo sono

S è congruente a S''

Ogni matrice D che ha elementi positivi sulla diag è $\sim I$ $\Rightarrow$ tutte le matrici D con elementi >0 sulla diag. sono congruenti fra loro per la prop. transitiva (+ simmetria)

$\boxed{D_1 \sim I}$ $\quad D_2 \sim I \quad$ $\boxed{(I \sim D_2)}$ $\Rightarrow D_1 \sim D_2$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\frac{\mu_n}{\lambda_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu_1}{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\frac{\mu_n}{\lambda_n}} \end{pmatrix} = D_2$$

Esercizio 3.6 (1) V $\dim(V) = n$

$\forall v \in V \quad \exists\, g_v$ definito positivo t.c. $g(v,v) = 1$

- g è definito una volta che dico come si comporta sui vettori di base di V

- posso mettere v in base
- posso completare la base di V con $n-1$ vettori

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$$

$$\boxed{g(v, v) = 1} \qquad \boxed{g(v, v_i) = 0} \quad \forall i = 2 \dots n$$

$$g(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & \\ 0 & & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & & & 1 \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \qquad S = I$$

g è il p.s. euclideo!

anche se cambio base, g continua ad essere definito positivo!

(2) Mostrare che $\forall\, v, w \in V$ di vettori INDIPENDENTI, $\exists\, g$ definito positivo e tale che $g(v, w) = 0$

- Posso mettere sia v che w in una base di V

- Posso completare la base di V con altri n−2 vettori $v_3, \dots, v_n$
- Posso definire g su questa base

$g(v,v)=1 \qquad g(w,w)=1 \qquad g(v,w)=0$

$g(w,v)=0$

$$S = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$g(v_i, v) = 0 \quad \forall i = 3 \dots n$

$g(v_i, w) = 0 \quad \forall i = 3, \dots n$

$g(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j \; 3 \dots n$

$S \equiv$ prodotto scalare euclideo sulla base scelta di V $\longrightarrow$ resta definito positivo su qualunque altra base!

3.4 g. prod. scal. su V

(1) se tutti i vettori sono isotropi, allora g è banale

Se $g(v,v)=0 \;\forall v \in V$, allora $g(v,w)=0$
$\forall v, w \in V$

IDEA! Per definire un p. scalare basta dire "cosa fa" un vettore scalar sé stesso

$$\boxed{g(v+w,\, v+w)} = \boxed{g(v,v)} + \boxed{g(w,w)} + 2g(v,w)$$

$$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$$

$$0 = 0 + 0 + 2g(v,w) \Rightarrow g(v,w) = 0$$

Il prodotto scalare è banale!

---

(2) Se g è indefinito $\left(\text{cioè } \begin{array}{l} \exists v \in V : g(v,v) > 0 \\ \exists w \in V : g(w,w) < 0 \end{array} \right)$ allora esiste un vettore isotropo non banale

$\exists\, u \neq 0$ tale che $g(u,u) = 0$

Si fa a "forza bruta", cioè si cerca u in modo esplicito, come combinaz. lineare di v e w

$$u = \alpha v + \beta w$$

$$g(u,u) = g(\alpha v + \beta w,\, \alpha v + \beta w) =$$

$$= \alpha^2 \underbrace{\boxed{g(v,v)}}_{>0} + \beta^2 \underbrace{\boxed{g(w,w)}}_{<0} + 2\alpha\beta g(v,w)$$

pongo $\beta = 1$ e cerco α

voglio che u sia isotropo

$$\alpha^2 g(v,v) + 2\alpha g(v,w) + g(w,w) = 0$$

Se trovo $\alpha \in \mathbb{R}$, ho finito

$$\alpha = \frac{-g(v,w) \pm \sqrt{(g(v,w))^2 - \overbrace{g(v,v)\,g(w,w)}^{\text{DISCORDI}}}}{\underbrace{g(v,v)}_{>0}}$$

$$\frac{\Delta}{4} = [g(v,w)]^2 - g(v,v)\,g(w,w) > 0$$

$$\alpha = \frac{-g(v,w) + \sqrt{\Delta/4}}{g(v,v)}$$

$$u = \frac{-g(v,w) + \sqrt{\Delta/4}}{g(v,v)}\, v + w \text{ è isotropo}$$

la dim. si ottiene per costruzione esplicita del vettore isotropo.