ESERCIZI SU MATRICI

Note Title 21/03/2017

1.13 Se $T: V \to V$ è diagonalizzabile allora $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$

$N(T)$

$\mathrm{Nucleo}(T)$

Se T è diagonalizzabile, allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V formata da autovettori di T : $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_n\}$

$n = \dim(V)$ $\quad n_1 = m_a(0) = m_g(0) \quad n_1 \geq 0$

$n_2 = n - n_1 = \dim(\mathrm{Im}(T))$

$\dim \mathrm{Ker}(T) = n_1 \qquad \dim \mathrm{Im}(T) = n - \dim \mathrm{Ker}(T)$

$= n - n_1 = n_2$

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \overbrace{}^{n_1} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & \begin{matrix} \lambda_{n_1+1} & \\ & \ddots \\ & & \lambda_n \end{matrix} \end{array}\right) \end{array} \Big\} n_2$$

$v \in V$

$$v = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \text{in maniera unica}}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e_i}_{\in \mathrm{Ker}(T)} + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n} \alpha_i e_i}_{\in \mathrm{Im}(T)}$$

$\mathcal{B}_0 = \{e_1 \dots e_{n_1}\} = $ base di $\mathrm{Ker}(T)$

$$T(v) = T(v_0 + v_1) = \underbrace{T(v_0)}_{= 0_V} + \underbrace{T(v_1)}_{\in \mathrm{Im}(T)}$$

Poiché la decomposizione di v in v_0 e v_1 è unica, allora anche la "decomposiz." di $T(v)$ lo è

$v = v_{ker} + v_{im}$ $\qquad$ $T(v_{im}) = T(v)$

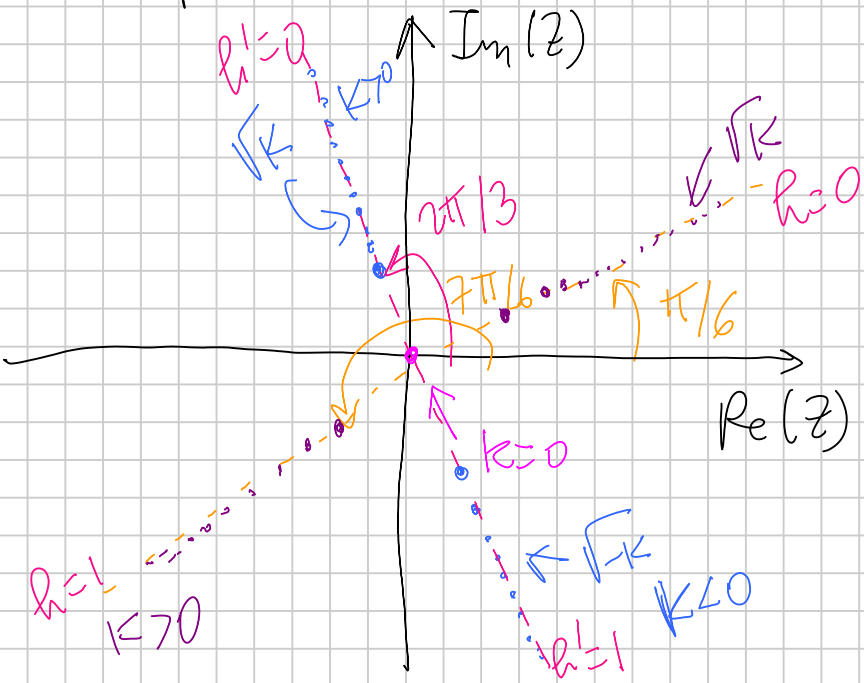
Ripassino numeri complessi

$$e^{\pi(\sqrt{3}+i)z^2} = 1 \qquad \pi(\sqrt{3}+i)z^2 = 0 + 2k\pi i$$

e^0 $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$

$$z^2 = \begin{cases} k e^{i\pi/3} & k>0 \\ 0 & k=0 \\ -k e^{i 4\pi/3} & k<0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} z &= \sqrt{k}\, e^{i\frac{\pi}{3} + h\pi} \\ z &= 0 \\ z &= \sqrt{-k}\, e^{i\frac{2\pi}{3} + h'\pi} \end{aligned}$$

Si può introdurre $h = 0, 1$ $\qquad$ $h' = 0, 1$



POLINOMIO MINIMO E FORME DI JORDAN

2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

trovare il polinomio minimo

$m_A(x)$ $\quad m_A(A) = 0$ $\quad m_A$ ha grado minimo

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$1C - 2C \to 1C$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$1R + 2R \to 1R$

$$\det\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{-\lambda} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \lambda & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda \det\begin{pmatrix} \cancel{\lambda} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 1$

$\lambda_4 = 1$

$m_a(0) = 2$

$m_a(1) = 2$

$$m_A(x) = x^{d_1} \cdot (x-1)^{d_2}$$

$1 \leq d_1 \leq 2$ — 2 possibilità

$1 \leq d_2 \leq 2$ — 2 possibilità

$m_A(x)$ è uno di questi $\begin{cases} x(x-1) \\ x^2(x-1) \\ x(x-1)^2 \\ x^2(x-1)^2 \end{cases}$

$A^2 - A$ NON È 0

$A^3 - A^2$ NON È 0

$A^3 - 2A^2 + A$ NON È 0

$A^4 - 2A^3 + A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 - 2A^3 + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 8 & 6 \\ 6 & 6 & -6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_A(x) = p_A(x)$

$d_1 = d_2 = 2$

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Altre modalità di risoluzione

$\lambda = 0$

$\dim \operatorname{Ker}(A)^n$

3	$n=1$
2	$n=2$
2	$n=3$
2	$n=4$

$$A e_1 \qquad A^2 e_1 \qquad A^3 e_1 \qquad A^4 e_1$$

$$A e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 e_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (+1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A^4 e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \times & \times & \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

sistema omogeneo

$$\begin{cases} -3\alpha - 4\beta - 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1 \quad \beta = -2 \quad \gamma = 1$

ad esempio!

$$p_{e_{1,A}}(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x-1)^2$$

ripetiamo lo stesso calcolo per gli altri 3 vettori di base $p_{e_{2,A}}(x)$ $p_{e_{3,A}}(x)$ $p_{e_{4,A}}(x)$

$$m_A(x) = m.c.m\,(p_{e_{1,A}}, p_{e_{2,A}}, p_{e_{3,A}}\, p_{e_{4,A}})$$

quindi non c'è modo di abbassare il grado

Esercizio 2.2 Costruire 2 matrici A A' stesso p $\quad p_A = p_{A'}$ stesso polinomio minimo $\quad m_A(x) = m_{A'}(x)$ stessa molteplicità geometrica $\quad m_g^A(\lambda) = m_g^{A'}(\lambda)$

$\lambda = 1$ con molta fantasia!

A e A' fatte entrambe da 3 blocchi di Jordan tutti con lo stesso λ ($=1$ o $=i$)

$\uparrow \qquad \nwarrow$

$3, 3, 1 \qquad 3, 2, 2 \qquad n = 7$

$p_A = (x-1)^7 \qquad p_{A'} = (x-1)^7$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & 0 & \\ & 0 & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

$$m_A = (\lambda-1)^3$$

$$m_g^A(1) = 7 - rk \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 7 - 4 = 3$$

$$A' = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$P_{A'} = (\lambda-1)^7$$

$$m_{A'} = (\lambda-1)^3$$

$$m_g^{A'}(1) = 7 - rk \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$= 7 - 4 = 3$$

ESERCIZIO 2.4

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$1C - 2C \to 1C$

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ \lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$1R + 2R \to 1R$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\,(-\lambda^2+2\lambda-1) = -(\lambda-1)^3$$

$$m_a(1) = 3 \qquad m_1 = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$m_2(1) = \dim\ker\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2}_{=0} = 3$$

$$\begin{aligned} m_0 &= 0 \\ m_1 &= 2 \\ m_2 &= 3 \\ m_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{matrix}]\,2 \\ ]\,1 \\ ]\,0 \end{matrix}$$

1 blocco di ordine 1

1 blocco di ordine 2

$$J_B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(B-I)^2 = 0 \qquad B^2 - 2B + I = 0$$

$$B^2 = 2B - I$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = (2B - I)\cdot B = 2B^2 - B =$$

$$4B - 2I - B = 3B - 2I$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = (3B - 2I) \cdot B = 3B^2 - 2B =$$
$$= 3(2B - I) - 2B = 4B - 3I$$

$$\boxed{B^n = nB - (n-1) I}$$ è vero? $\forall n$?

Dim per induzione

$n = 1$ $\quad B^1 = 1 \cdot B - (1-1) \cdot I = B - 0 \cdot I = B$

OK

$n \to n+1$

$$B^{n+1} = B^n \cdot B = [nB - (n-1) I] \cdot B =$$
$$= nB^2 - nB + B = n(2B - I) - nB + B$$
$$= 2nB - nI - nB + B = (n+1)B - nI$$
$$= (n+1) B - [(n+1) - 1] I$$

$n \to n+1$

quindi la relaz. $B^n = nB - (n-1) I$ è vera $\forall n$

$$B^{1000} = 1000 B - 999 I$$

1.5

Data $A = \begin{pmatrix} 23 & -84 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$ determinare A^n

→ trovare $P_A(x)$ $\qquad$ $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ traccia $\qquad$ det

$$A^2 = -\alpha A - \beta I$$

$$A^3 = (-\alpha A - \beta I) A = -\alpha A^2 - \beta A$$

$$= -\alpha(-\alpha A - \beta I) - \beta A = (\alpha^2 - \beta) A + \alpha\beta I$$

Provate a vedere cosa esce!

ESERCIZIO 2.9 $\qquad A \quad 7 \times 7$

$(A - I)^3 = 0 \qquad rk(A - I)^2 = 2 \quad \rightarrow$ trovare J_A

l'unico λ è 1 $\qquad m_A(x) = (x-1)^d$

$d = 1, 2, 3$

$m_0 = 0$

$m_1 = r$

$m_2 = 7 - 2 = 5$

$m_3 = 7$

$m_3 - m_2 = 2$

$m_2 - m_1 = 5 - r$

$m_1 - m_0 = r$

3 3 1

3 4

n° di blocchi di dim $\geq 3 = 2$

n° di blocchi di dim $\geq 2 = 5 - r$

n° di blocchi di dim $\geq 1 = r$

~~$r = 2$~~	$r = 3$
~~2~~	2
~~3~~	2
~~2~~	3

ho 3 blocchi di Jordan di dim 3, 3, 1

4 non ci può essere perché $(A-I)^3=0$

3 2 2 non può succedere

l'unica possibilità è 3 3 1

m.barsanti@ing.unipi.it