# ESERCIZI SU MATRICI

Note Title 14/03/2017

1.7 1.8 1.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

0 0

$\det(A) = 0$

$tr(A) = 1+1-2 = 0$

$K = 0+0+0 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$P(\lambda) = -\lambda^3$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ radici del polinomio caratteristico di A

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$K = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$

somma dei minori principali

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$ae-bd$

$ai-cg$

$ei-hf$

$K = (ae-bd) + (ei-hf) + (ai-cg)$

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \overset{C1 \to C1-C2}{=} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ +\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\overset{R2 \to R1+R2}{=} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(-\lambda)\left[(2-\lambda)(-2-\lambda)+4\right] = -\lambda\left(\cancel{-4} + \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + \cancel{4}\right) =$$

$$= -\lambda(+\lambda^2) = -\lambda^3$$

$m_a(0) = 3$ $\qquad$ $m_g(0) = ?$

$m_g(\bar{\lambda}) = n - \text{rango}\,(A - \bar{\lambda} I)$ $\qquad \bar{\lambda} = 0$

$(rk)$ $\qquad n$ = ordine della matrice

$$3 - rk \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 < 3$$

Poiché $m_a(0) > m_g(0)$, A non è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad P(\lambda) = -(\lambda - a)^3 = (a - \lambda)^3$$

$m_a(a) = 3 \qquad a \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a$

$$m_g(a) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 0 = 3$$ solo se $b, c, d$ sono TUTTI NULLI

Se almeno uno fra $b, c, d$ è diverso da 0, A non è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ 1 & k-\lambda & 1 \\ 0 & -k & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{R1 \to R1+R3}{=}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 1 & k-\lambda & 1 \\ 0 & -k & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{C3 \to C3 - C1}{=} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & k-\lambda & 0 \\ 0 & -k & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (1-\lambda)(k-\lambda)(1-\lambda)$ $\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = k$

Se $k \neq 1 \quad m_a(1) = 2 \quad m_a(k) = 1$

Se $k = 1 \quad m_a(1) = 3$

Se $k \neq 1 \quad m_g(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & k-1 & \boxed{1} \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-2 & k \neq 0 \\ 3-1 & k=0 \end{cases}$

$k$

Se $k = 0 \quad m_a(1) = 2 \quad m_g(1) = 3-1 = 2 \Rightarrow A$ è diag.

Se $k \neq 0$ e $k \neq 1 \quad m_a(1) = 2 \quad m_g(1) = 3-2 = 1 \Rightarrow A$ non è diag.

Se $k = 1 \quad m_a(1) = 3, \quad m_g(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$

quindi $A$ non è diag.

Proviamo a trovare una base di autovettori per $k=0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 0$

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore corrispondente a $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x + z = y \\ z = z \end{cases}$$

$x_1 = 0 \quad z_1 = 1$
$y_1 = 1$

$x_2 = 1 \quad z_2 = 0$

$y_2 = 1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A_0$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1.1.0

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ su $\mathbb{R}$ senza autovettori

$P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2+1)$ è un esempio di polinomio che non ha radici reali $\Rightarrow$ non ci sono autovalori

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$A_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$A_2$

$P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$

non ha radici reali

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\det(A_4 - \lambda I) = [\det(A_2 - \lambda I)]^2$

Esercizio 1.5 data $A = \begin{pmatrix} +23 & -84 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$ determinare $A^{10}$

$\cancel{\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots \cdot A}_{10 \text{ volte}}}$

$\exists M$ tale che

$$M A M^{-1} = D$$
$$A = M^{-1} D M$$

$$A^{10} = (M^{-1} D M)^{10} = \underbrace{(M^{-1} D M) \cdot (M^{-1} D M) \cdot \dots \cdot (M^{-1} D M)}_{10 \text{ volte}}$$

$$= M^{-1} D \underbrace{(M M^{-1})}_{I} D \underbrace{(M M^{-1})}_{I} \dots D M =$$

$$= M^{-1} \cdot D \cdot \cancel{I} \cdot D \cdots \cdot \cancel{I} \cdot D \cdot M =$$

$$= M^{-1} \cdot D \cdot D \cdot D \cdots \cdot D \cdot M = M^{-1} \cdot D^{10} \cdot M =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{10} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{10} \end{pmatrix} \qquad = M^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{10} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{10} \end{pmatrix} M$$

---

ESERCIZIO 1.8 prima vorrei fare 1.6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T : M(2) \to M(2)$$

$$T(X) = AX$$

prodotto fra matrici

$$X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & 2z+t \\ x+y & z+t \end{pmatrix}$$

$$x\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2x M_1 + x M_2 + y M_1 + y M_2 + 2z M_3 + z M_4 +$$
$$+ t M_3 + t M_4 =$$
$$= (2x+y) M_1 + (x+y) M_2 + (2z+t) M_3 + (z+t) M_4$$

$$T\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} z \\ t \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2x+y \\ x+y \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 2z+t \\ z+t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

La matrice associata a T rispetto alla base $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ è diagonale a blocchi

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \\ 2z+t \\ z+t \end{pmatrix}$$

B

Matrice associata a T rispetto a $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$

Se voglio diagonalizzare $T$, $B$ devo assicurarmi che $A$ sia diagonalizzabile

$$\det(B-\lambda I) = \left[\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right]^2$$

$$= (\lambda^2 - 3\lambda + 1)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

reali e distinti

## Esercizio 1.8

$A \in M(2)$ qualsiasi $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$T(X) = AX \qquad X \in M(2)$

$\{M_1\ M_2\ M_3\ M_4\}$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right)$$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cosa succede se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 = -1$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$m_a(-1) = 2$

$m_a(+1) = 2$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \\ t = z \\ z = t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \\ t = -z \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice B associata a T è formata da blocchi tutti uguali fra di loro.

Se ciascun blocco è diagonalizzabile $\exists\, M : MAM^{-1} = D$ potete trovare una base in $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice A diviene della forma $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ nella base degli autovettori

di $A$ completata con 2 zeri in basso

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ nello span di questi 2 vettori di $M(2)$, $T$ è diagonale

Se prendete $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ come base nell'altro sottospazio

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 z \\ \lambda_2 t \end{pmatrix}$$

Se $B$ è diagonalizzabile, essendo della forma
$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \lambda_1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

Ripassino complessi

$$e^{\pi(\sqrt{3}+i)z^2} = 1 \quad \text{risolvere}$$

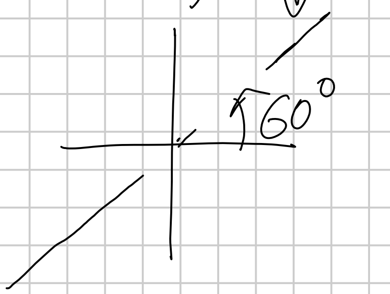
$$1 = e^0 \qquad e^{\boxed{\pi(\sqrt{3}+i)z^2}} = e^{\boxed{0}} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{\pi}(\sqrt{3}+i)z^2 = 0 + 2k\cancel{\pi}i$$

$$(\sqrt{3}+i)z^2 = 2ki$$

$$z^2 = \frac{2ki}{\sqrt{3}+i} = \frac{2ki(\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{ki(\sqrt{3}-i)}{2} =$$

$= k\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad$ $z^2 = k\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ $k>0$




se $k \geq 0$ $\qquad z^2 = k\, e^{i\pi/3}$ $\qquad$ ①

se $k < 0$ $\qquad z^2 = -k\, e^{i4\pi/3}$

① $\qquad z = \pm\sqrt{k}\, e^{i\pi/6}$

② $\qquad z = \pm\sqrt{-k}\, e^{i\,2\pi/3}$

provate a rappresentarli graficamente!