COMPITI E COMPITINI DELL'ANNO 2018

Le soluzioni degli esercizi sono in fondo al file.

Compito di Geometria e algebra lineare dell'8 gennaio 2018

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1.

a) Si definisca cosa sia una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard;

b) Si dimostri che se F è una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard e λ è un autovalore di F allora $\lambda = \pm 1$;

c) Si faccia un esempio di isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard che non sia diagonalizzabile e che non abbia 1 come autovalore.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x + 2y + 3z = 0$. Sia $E = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e sia S il sottospazio delle matrici simmetriche ovvero delle matrici della forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Sia $F : W \longrightarrow S$ l'applicazione lineare definita da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+2y \\ -3z & z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare tale che

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \quad \text{e } G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Scegliere una base per W e una per S e scrivere la matrice associata a F rispetto a queste basi;

b) Scrivere la matrice associata a G rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Si consideri l'isometria F di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

a) Determinare di che tipo di isometria si tratta;

b) Per quali $b \in \mathbb{R}^3$ l'isometria $F_b(v) = F(v) + b$ è una rotazione?

c) Scrivere F come composizione di riflessioni;

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Sia $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito dalla formula

$$g(p, q) = p(1)q(2) + p(2)q(1) + p'(0)q'(0).$$

a) Calcolare la segnatura di g;

b) Esiste una retta W passante per l'origine in V tale che $g|_W$ è nullo?

c) Esiste un piano W passante per l'origine in V tale che $g|_W$ è nullo?

Soluzioni del compito dell'8 gennaio 2018

Esercizio 1. a) Sia $g(\cdot,\cdot)$ un prodotto scalare dello spazio vettoriale V. Una isometria lineare rispetto a g è una applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ tale che

$$g(F(u), F(v)) = g(u, v)$$

per ogni $u, v \in V$.

b) Sia F una isometria lineare di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard. Sia $F(v) = \lambda\, v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$ e $v \neq 0$. Allora

$$\|v\|^2 = \|F(v)\|^2 = \|\lambda\, v\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Poiché $\|v\| \neq 0$ ricaviamo $\lambda^2 = 1$ ovvero $\lambda = \pm 1$.

c) una antirotazione di un angolo diverso da 0 e π rispetto ad un asse passante per l'origine ha questa proprietà. Per esempio l'antirotazione associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. I vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono una base di W e le matrici

$$E_{11}; \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_{22}$$

sono una base di S e la matrice associata a F rispetto a queste basi è

$$[F]^{v_1,v_2}_{E_{11},E,E_{22}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo prima la matrice associata a G rispetto alla base v_1, v_2, e_1 per $\mathbb{R}^3$ e alla base standard per $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Abbiamo

$$[G]^{v_1,v_2,e_1}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$[G]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = [G]^{v_1,v_2,e_1}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} \cdot []^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,e_1}.$$

Calcoliamo la matrice di cambiamento di base

$$[]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,e_1} = \left([]^{v_1,v_2,e_1}_{e_1,e_2,e_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$[G]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) Per capire di che tipo di isometria lineare si tratta calcoliamo l'insieme dei punti fissati fa F ovvero risolviamo il sistema $A\cdot x = x$. Otteniamo il sistema $B\cdot x = 0$ associato alla matrice

$$B = A - \mathsf{I} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Se sommo alla prima riga 5 volte la seconda riga ottengo l'opposto della prima riga, quindi la terza equazione si ottiene dalle prime due. Quindi il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -13x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ricavo x_2 dalla seconda equazione e sostituisco nella prima equazione trovando $x_1 = x_3$ e $x_2 = 5x_3$. In particolare l'insieme dei punti fissi è la retta r generata da $(1,5,1)$. Quindi l'isometria è una rotazione di asse r. NOTA BENE: il sistema lineare si puo' risolvere in moltissimi modi diversi e vanno tutti bene. Quello che non va bene e' scrivere la soluzione senza giustificazioni.

b) Essendo che la parte lineare di F_b è una rotazione, F_b è una rotazione se e solo se ha almeno un punto fisso ovvero se e solo se l'equazione $F_b(v) = v$ ha soluzione. Equivalentemente se ha soluzione l'equazione

$$(-F)(v) = b$$

che è come dire che $b \in Im(-F)$. Essendo F una rotazione diversa dall'identità l'immagine di $-F$ è il piano ortogonale all'asse di rotazione r. Quindi F_b ha un punto fisso se e solo se b appartiene al piano ortogonale a r passante per l'origine ovvero, visto che $(1,5,1)$ genera r, al piano di equazione $x_1 + 5\,x_2 + x_3 = 0$.

c) La rotazione F sarà la composizione di due riflessioni che contengono la retta r la prima di queste due riflessioni si può scegliere a piacere. Sia π il piano $x_1 - x_3 = 0$. Se u è il vettore $(1,0,-1)$, la riflessione R rispetto al piano π si può scrivere mediante l'equazione

$$R(v) = v - 2\frac{u\cdot v}{\|u\|^2}u.$$

Ed è quindi uguale a $R(x,y,z) = (z,y,x)$. Si noti infine che la composizione $S = RF$ è una isometria di determinante -1 che lascia la retta r fissa e quindi è sicuramente una riflessione. Infine osservando che $R^2 =$ ricaviamo

$$F = RS.$$

Esercizio 4. a) Calcoliamo la matrice associata a g rispetto alla base standard. Le entrate della matrice sono i prodotti $g(t^i, t^j)$ per $i,j = 0,1,2$, otteniamo quindi

$$[g]_{1,t,t^2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se calcoliamo i determinanti delle sottomatrici matrici 1×1, 2×2 in alto a sinistra e di tutta la matrice otteniamo

$$2, 1, -9.$$

Quindi la segnatura è $(2,1,0)$.

b) In una qualche base f_1, f_2, f_3 il prodotto scalare si scriverà nella forma

$$[g]_{f_1,f_2,f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In particolare la retta generata da $f_1 - f_3$ è isotropa. Se vogliamo essere più espliciti (l'esercizio non lo chiedeva) per esempio la retta generata dal polinomio $t^2 - 1$ è isotropa.

c) Non esiste un piano isotropo. Infatti supponiamo sia W un piano allora $W^\perp$ ha dimensione 1 e quindi non può essere che $g(u,v) = 0$ per ogni $u, v \in W$.