Compito di Geometria e algebra lineare del 7 settembre 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $F : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

a) È vero che se $F^2 = Id$ allora F è diagonalizzabile?
b) È vero che se $F^2 = -Id$ allora F è diagonalizzabile?
c) È vero che se $F^2 = 0$ allora F è diagonalizzabile?

motivare la risposta con una dimostrazione nel caso sia diagonalizzabile o con un controesempio in caso contrario.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + z = 0$, sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T : W \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W.$$

Sia inoltre $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \qquad \text{e} \qquad S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) scegliere una base di W e una di E e scrivere la matrice associata a T rispetto a queste basi.
b) scrivere la matrice associata ad S rispetto alla basi standard di $\mathbb{R}^3$ ed E.

Esercizio 3. Considera l'isometria $f(x) = Ax$ di $\mathbb{R}^3$ data da

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilisci se f è una riflessione, una rotazione o una antirotazione e determina l'insieme dei punti x tali che $f(x) = x$;
b) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^3$ tale che l'isometria $g(x) = Ax + b$ non abbia punti fissi.
c) Trova un vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^3$ tale che l'isometria $g(x) = Ax + b$ abbia punti fissi.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e sia b il seguente prodotto scalare:

$$b(f, g) = f(0)g(0) - f(1)g(1) + f(2)g(2) \qquad \text{per ogni } f, g \in V.$$

Determinare una base ortogonale e la segnatura di b. Esiste un sottospazio di dimensione 2 ristretta al quale b è degenere?

1. Soluzioni

Esercizio 1. a) In questo caso F è diagonalizzabile. Infatti $F^2 - Id = 0$ quindi il polinomio minimo di F divide $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$ e quindi non ha radici multiple.

b) In questo caso F non è mai diagonalizzabile. Infatti se $F^2 + Id = 0$ allora ogni autovalore verifica $\lambda^2 + 1 = 0$. In particolare una tale applicazione non ha autovalori reali e quindi non è diagonalizzabile. Si noti inoltre che applicazioni di questo tipo esistono: per esempio se $V = \mathbb{R}^2$ e F è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora $F^2 = -Id$.

c) In questo caso F può essere non diagonalizzabile. Per esempio se $V = \mathbb{R}^2$ e F è applicazione lineare associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F ha come unico autovalore 0 con molteplicità geometrica 1.

Esercizio 2. a) W è un piano e ha per base i vettori $v_1 = e_2$ e $v_2 = e_1 - 2e_3$. Abbiamo

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21} \qquad T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = E_{11} - 3E_{22}$$

Quindi se scegliamo come base di E la base standard: $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ abbiamo che

$$[T]^{v_1,v_2}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Osserviamo che $v_3 = e_1 + e_2 + e_3 \notin W$ quindi v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare abbiamo che

$$[S]^{v_1,v_2,v_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo adesso il cambio di base. Abbiamo

$$[Id]^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e calcolandone l'inversa otteniamo

$$[Id]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$[S]^{e_1,e_2,e_3}_{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) Studiamo l'equazione $A \cdot x = x$ o equivalentemente $(A - I) \cdot x = 0$. Sostituendo il valore di A otteniamo

$$A - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

da cui si ricava che l'insieme cercato è il piano π definito dall'equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Quindi f è la riflessione definita da questo piano.

b,c) L'applicazione g ha punti fissi se e solo l'equazione $g(x) = x$ ha soluzione ovvero se e solo l'equazione

$$(A - I) \cdot x = -b$$

ha soluzione, equivalentemente se b è nell'immagine di $A - I$. La matrice $A - I$ ha rango 1 e l'immagine è la retta generata dal vettore $(1, 1, -1)$. In particolare se $b = (1, 1, -1)$ allora g ha punti fissi e se $b = (1, 0, 0)$ allora g non ha punti fissi.

Esercizio 4. Per calcolare la segnatura e una base ortogonale si può calcolare la matrice associata a b rispetto alla base standard di V e applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Qui procederemo in modo diverso usando il fatto che siamo sullo spazio dei polinomi per svolgerei conti in modo diverso. Osserviamo che la formula che definisce il prodotto scalare diventa più semplice se il polinomio f si annulla in 0 e in 1 o in 0 e 2 o in 1 e in 2. Consideriamo quindi i polinomi di V che si annullano in 0 e 1. Questo è un sottospazio di dimensione 1 di V generato dal polinomio $f_2(x) = x(x - 1)$. Similmente il sottospazio dei polinomi che si annulla in 0 e 2 è generato da $f_1(x) = x(x - 2)$ e il sottospazio dei polinomi che si annullano in $1, 2$ è generato da $f_0(x) = (x - 1)(x - 2)$. Osserviamo che f_0, f_1, f_2 sono linearmente indipendenti, infatti se fosse $f = rf_0 + sf_1 + tf_3 = 0$ da $f(0) = 0$ ricaverremmo $r = 0$ e similmente ricaveremmo $s = t = 0$. Osserviamo inoltre che

$$b(f_0, f_0) = 4 > 0 \qquad b(f_1, f_1) = -1 < 0 \qquad b(f_2, f_2) = 4 > 0 \qquad \text{e } b(f_i, f_j) = 0 \qquad \text{per } i \neq j$$

Quindi f_0, f_1, f_2 sono una base ortonormale e la segnatura è $(2, 1, 0)$.

Se un prodotto scalare non è definito allora esiste sempre un sottospazio sul quale la forma è degenere. Infatti in queste ipotesi esiste sempre un vettore isotropo non nullo, nel nostro caso per esempio $f = f_0 + 2f_1$. Ora sia W l'ortogonale di f. Poichè b è non degenere W ha dimensione 2 e $b(f, h) = 0$ per ogni $h \in W$ quindi $b|_W$ è degenere.