Compito di Geometria e algebra lineare del 5 giugno 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia b un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

a) Definire cosa è una applicazione ortogonale rispetto a b;
b) Dimostrare che se b è definito positivo e T è una trasformazione ortogonale rispetto a b allora gli autovalori di T sono uguali a ± 1;
c) L'affermazione precedente rimane vera se si assume soltanto che b sia non degenere?

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Svolgere 2 dei seguenti punti:

a) Calcolare la forma di Jordan di F;
b) Dire se esistono due basi u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.
c) Dire se esiste una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3}$ è diagonale.

Esercizio 3. Considera le due rette affini seguenti in $\mathbb{R}^3$:

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s = \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

a) Trova la distanza fra r e s.
b) Costruisci una isometria $f(x) = Ax + b$ tale che $f(r) = s$.

Esercizio 4. Considera al variare di $k \in \mathbb{R}$ la conica affine

$$C_k = \{x^2 - 6xy + ky^2 + 2x + k = 0\}.$$

a) Determina il tipo affine di C_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
b) Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica è una ellisse o una iperbole, e determina il suo centro al variare di k in questi casi.

Soluzioni del compito del 5 giugno 2017

Esercizio 1. a) Una applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$, si dice ortogonale se $b(T(u), T(v)) = b(u, v)$ per ogni $u, v \in V$

b) Sia b definito positivo e sia λ un autovalore di una trasfromazione T ortogonale rispetto a b. Allora esiste un vettore non nullo v tale che $T(v) = \lambda\, v$. Quindi

$$b(v, v) = b(T(v), T(v)) = \lambda^2\, b(v, v)$$

e dividendo per $b(v, v)$ che è non nullo, perché b è definito positivo, otteniamo $\lambda^2 = 1$, da cui la tesi.

c) Sia b il prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^2$ associato alla forma quadratica $q(x, y) = xy$. La trasformazione $T(x, y) = (2x, y/2)$ è ortogonale ma ha autovalori uguali a 2 e 1/2.

Esercizio 2. a) Il polinomio caratteristico di F è $(t-1)t^2$. Per determinare la forma di Jordan bisogna calcolare l'autospazio relativo all'autovalore zero. Tale autospazio risulta uguale ai vettori della forma $(0, y, y)$ e ha quindi dimensione 1. La forma di Jordan è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Se si possono scegliere liberamente una base in partenza e una in arrivo è sempre possibile diagonalizzare una matrice, è praticamente la dimostrazione della formula della dimensione.

Nel caso specifico possiamo scegliere $u_1 = (0, 1, 1)$ che è una base del nucleo di F e u_2 e u_3 qualsiasi tali che u_1, u_2, u_3 sia una base di $\mathbb{R}^3$. Per esempio $u_2 = e_1$ e $u_3 = e_2$. Osserviamo che $v_2 = F(u_2) = (1, 0, 1)$

e $v_3 = F(u_3) = (0,1,1)$ sono linearmente indipendenti. Sia ora v_1 un completamento ad una base di questi due vettori, per esempio $v_1 = e_1$ allora

$$[F]^{u_1,u_2,u_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) una tale base non esiste infatti supponiamo esista allora avremmo

$$[F]^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Inoltre poiché $F(e_i) \neq 0$ per ogni i abbiamo $a, b, c \neq 0$. Il rango della matrice associata sarebbe quindi uguale a 3 mentre abbiamo visto che F ha nucleo non banale.

Esercizio 3. a) Osserviamo che possiamo scrivere r nella forma $P_0 + \mathbb{R}\, u_0$ con $u_0 = e_3$ e $P_0 = e_1$ e s nella forma $\mathbb{R}\, v_0$ con $v_0 = e_1 + e_2 + e_3$.

Consideriamo il piano π generato da u_0 e v_0. Tale piano avrà equazione $ax + by + cz = 0$ e imponendo che contenga u_0 e v_0 otteniamo $c = 0$ e $a = -b$. In particolare è il piano di equazione $x - y = 0$ ovvero è il piano ortogonale al vettore $w_0 = e_1 + e_2$. Indichiamo con T la proiezione di $\mathbb{R}^3$ su questo piano. Ricordiamo che abbiamo

$$T(v) = v - \frac{(v \cdot w_0)}{\|w_0\|^2} w_0.$$

Tutti i punti della retta r hanno la medesima distanza dal piano π e la proiezione di r su π è una retta parallela ad u_0 e quindi interseca s. Quindi la distanza di r da s è uguale alla distanza di r da π che è uguale alla distanza di P_0 da $T(P_0)$. Abbiamo quindi

$$dist(r,s) = dist(P_0, \pi) = \|P_0 - T(P_0)\| = \|\frac{(P_0 \cdot w_0)}{\|w_0\|^2} w_0\| = \frac{|(P_0 \cdot w_0)|}{\|w_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Procediamo nel seguente modo, prima trasliamo la retta r in una retta r' passante per l'origine e poi operiamo una qualsiasi trasformazione ortogonale che porta r' in s. Come traslazione possiamo scegliere la traslazione $v \mapsto v - e_1$ ovvero che porta le retta r nella retta $\mathbb{R}\, u_0$.

Ora consideriamo una qualsiasi trasformazione ortogonale che manda la retta r' nella retta s. La retta r' è generata da u_0 mentre la retta s è generata da $v_1 = v_0/\sqrt{3}$ quindi una trasformazione ortogonale che manda u_0 in v_1 manda la retta r' nella retta s. Per determinare una tale trasfromazione ortogonale completiamo v_1 ad una base ortonormale, per esempio $v_2 = 1/\sqrt{2}(e_1 - e_2)$ e $v_3 = 1/\sqrt{6}(e_1 + e_2 - 2e_3)$. Quindi la matrice le cui colonne sono le coordinate di v_2, v_3, v_1, ovvero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

è ortogonale e verifica $Au_0 = v_1$. Se compongo le due applicazioni ottengo

$$f(v) = A(v - e_1) = Av - Ae_1$$

che è una isometria che porta r in s.

Esercizio 4. a) per determinare la classificazione affine della quadrica determiniamo la segnatura della matrice $\bar{A}$ associata alla quadrica completa e la segnatura della matrice A associata alla parte quadratica della conica. Abbbiamo

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & k \end{pmatrix}.$$

I determinanti dei minori in alto a sinistra della matrice $\bar{A}$ sono

$$1, k-9, k(k-10)$$

quindi della matrice A sono $1, k-9$.

Per $k \neq 0, 10$ possiamo calcolare le due segnature con il criterio di Sylvester e otteniamo

- per $k < 0$ $\bar{A}$ ha segnatura $(1,2,0)$ e A ha segnatura $(1,1,0)$ come $x^2 - y^2 - 1 = 0$ e quindi è una iperbole.
- per $k = 0$ otteniamo $x(x - 6y + 2) = 0$ che sono due rette incidenti;

- per $0 < k < 9$ $\bar{A}$ ha segnatura $(2,1,0)$ e A ha segnatura $(1,1,0)$ come $x^2 - y^2 + 1 = 0$ e quindi è una iperbole.
- per $9 < k < 10$ $\bar{A}$ ha segnatura $(2,1,0)$ e A ha segnatura $(2,0,0)$ come $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e quindi è una ellisse.
- per $10 < k$ $\bar{A}$ ha segnatura $(3,0,0)$ e A ha segnatura $(2,0,0)$ come $x^2 + y^2 + 1 = 0$ e quindi la quadrica è vuota.
- per $k = 10$ la segnatura di $\bar{A}$ è $(2,0,1)$ e quella di A è $(2,0,0)$ come $x^2 + y^2 = 0$ e quindi è un punto.

Infine per $k = 9$ $\bar{A}$ è non degenere ha determinante negativo e ha il primo minore uguale a 1. Quindi l'unica possibilità è che la segnatura di $\bar{A}$ sia $(2,1,0)$ e quella di A $(1,0,1)$ come $x^2 - 2y = 0$ e quindi è una parabola;

b) Il centro è soluzione del sistema $Ax + b = 0$, cioè

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -3x + ky = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\left(\frac{k}{9-k}, \frac{3}{9-k} \right).$$