Compito di Geometria e algebra lineare del 17 luglio 2017

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito. Avete a disposizione 3 ore di tempo.

Esercizio 1. Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $\dim N(T) = 1$ e sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 4

a) dimostrare che $W \cap \mathrm{Im}(T) \neq 0$;

b) quali sono le possibili dimensioni di $W \cap \mathrm{Im}(T) \neq 0$? motivare la risposta

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 9 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

a) La matrice A è diagonalizzabile?

b) Determina forma di Jordan e polinomio minimo di A.

Esercizio 3. Considera la retta affine in $\mathbb{R}^3$

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

a) Scrivi una isometria $f(x) = Ax + b$ che sia una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno a r.

b) Scrivi una isometria $g(x) = Cx + d$ con $C \neq I$ tale che $g(r) = r$ e che non abbia punti fissi.

Esercizio 4. Sia b il seguente prodotto scalare su $\mathbb{R}^7$

$$b\big((x_1, \ldots, x_7), (y_1, \ldots, y_7)\big) = \sum_{i \neq j} x_i \, y_j$$

Determinare la segnatura di b.

1. Soluzioni del compito del 17 luglio 2017

Esercizio 1. a) Sia $V = \mathrm{Im}(T)$. Dal teorema della dimensione ricaviamo che $\dim V = 3$. Dalla formula di grassmann otteniamo inoltre che

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 7 - \dim V + W.$$

Poiché $V + W \subset \mathbb{R}^5$ abbiamo che la sua somma ha dimensione minore o uguale a 5 e quindi $\dim V \cap W \geqslant 2$ ed in particolare è non zero.

b) Nel punto a) abbiamo ricavato che $\dim V \cap W \geqslant 2$, inoltre poiché $V \cap W \subset V$ abbiamo che $\dim V \cap W \leqslant 3$. Quindi la dimensione di $V \cap W$ è uguale a 2 o a 3. Mostriamo con un esempio che entrambe le possibilità si verificano.

Supponiamo che sia $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(x_1, x_2, x_3, 0, 0)$ e che sia W il sottospazio dei vettori con la prima coordinata uguale a 0. Allora $V \cap W$ è il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ e ha dimensione 2.

Supponiamo ora invece che W sia il sottospazio dei vettori con l'ultima coordinata uguale a 0 e che T sia come in precedenza. Allora $V \cap W$ è il sottospazio definito dalle equazioni $x_4 = x_5 = 0$ e ha dimensione 3.

Esercizio 2. a) A non è diagonalizzabile, infatti se calcoliamo il polinomio caratteristico otteniamo

$$p_A(t) = [(t-3)(t+3)+9]^2 = t^4$$

quindi A ha un unico autovalore uguale a 0 con molteplicità uguale a 4. Se fosse diagonalizzabile sarebbe quindi la matrice nulla.

b) Calcoliamo l'autospazio relativo all'autovalore 0. Otteniamo che è l'insieme dei vettori della forma $(x, 3x, z, 3z)$, quindi ha dimensione 2. Questo ci dice che la forma di Jordan è composta da due blocchi di Jordan che possono avere dimensione 3 ed 1 o 2 e 2. Calcoliamo adesso il polinomio minimo, questo sarà un divisore di t^4. Calcolando A^2 otteniamo che $A^2 = 0$ quindi il polinomio minimo è t^2. La forma di Jordan non può quindi avere blocchi di dimensione 3. Abbiamo quindi che la forma di Jordan di A è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. a) La retta r può essere scritta nella forma $r = \{v_0 + t\,v_1 \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ con $v_0 = (1, 0, 1)$ e $v_1 = (0, 1, 1)$.

Calcoliamo prima la matrice associata ad una rotazione R di $\pi/2$ attorno alla retta $\mathbb{R}v_1$. Costruiamo una base ortonormale che ha come primo vettore un vettore parallelo a v_1. Possiamo scegliere

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare abbiamo

$$[Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella base u_1, u_2, u_3 possiamo scegliere R in modo che sia

$$[R]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned}
[R]^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3} &= [Id]^{u_1,u_2,u_3}_{e_1,e_2,e_3} \cdot [R]^{u_1,u_2,u_3}_{u_1,u_2,u_3} \cdot [Id]^{e_1,e_2,e_3}_{u_1,u_2,u_3} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Possiamo calcolare f nel seguente modo: prima applichiamo una traslazione che porta la retta r nella retta $\mathbb{R}v_1$, poi applichiamo R e poi applichiamo la traslazione opposta a quella iniziale. Ovvero $f(x) = R(x - v_0) + v_0 = R(x) + v_0 - R(v_0)$ dalla quale otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) Possiamo costruire g componendo l'applicazione f costruita nel punto precedente con una traslazione lungo l'asse r. In questo modo otteniamo una glissorotazione di asse r che non ha punti fissi. Per esempio possiamo porre $g(x) = f(x) + v_1$ da cui

$$C = A \qquad \text{e} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Osserviamo che

$$b\big((x_1, \dots, x_7), (x_1, \dots, x_7)\big) = \left(\sum x_i\right)^2 - \sum x_i^2.$$

Sia W il sottospazio definito dall'equazione $x_1 + \dots + x_7 = 0$. W ha dimensione 6 e

$$b\big((x_1, \dots, x_7), (x_1, \dots, x_7)\big) = -\sum x_i^2 \qquad \text{se} \qquad (x_1, \dots, x_7) \in W$$

quindi b è definita negativa su W. In particolare $i_- \geqslant 6$.

Sia ora U il sottospazio generato dal vettore $u_0 = (1, \dots, 1)$. Abbiamo $b(u_0, u_0) = 42 > 0$. Quindi $i_+ \geqslant 1$.

Poiché la somma degli indici di segnatura deve essere uguale a 7 otteniamo $i_+ = 1$, $i_- = 6$ e $i_0 = 0$.

Si poteva anche calcolare il polinomio caratteristico della matrice associata o trovare una base ortonormale.